移流拡散方程式に対する不連続 Galerkin 法の理論解析における注意

千葉悠喜　　齊藤宣一

東京大学 数理科学研究科

日本応用数理学会 研究部会連合発表会 2016 年 3 月 4 日

目次

1. 導入

2. DG 法のスキーム

3. DG 法の誤差評価
   - 拡散項の評価
   - 移流項の評価
   - 全体の評価

1. 導入

導入

次の定常移流拡散方程式を考える．

$$
\begin{cases}
-\varepsilon\Delta u + \nabla\cdot(\beta u) + \gamma u = f & \text{in} \quad \Omega \\
u = g_D & \text{on} \quad \Gamma_D \\
\varepsilon\nabla u\cdot n = g_N & \text{on} \quad \Gamma_N
\end{cases}
\tag{1}
$$

仮定

- $\Omega \subset \mathbb{R}^d\,(d=2,3)$ **：有界な多角形領域**
- $0 < \varepsilon \leq 1$ **：定数**
- $\beta \in C^1(\overline{\Omega})^d$，$\gamma \in L^\infty(\Omega)$
- $\partial\Omega = \overline{\Gamma_D \cup \Gamma_N}$，$\Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset$,$n$ **：**$\partial\Omega$ **上の外向き単位法線ベクトル**
- $\Gamma_- := \{x \in \partial\Omega \colon \beta\cdot n < 0\} \subset \Gamma_D$，$\Gamma_+ := \partial\Omega \setminus \Gamma_-$
- $f \in L^2(\Omega)$，$g_D \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_D)$，$g_N \in L^2(\Gamma_N)$
- β，γ **ともに恒等的に** 0 **である．またはある正定数** ρ_0 **が存在し，**Ω **上** $\rho(x) := \gamma + \frac{1}{2}\operatorname{div}\beta \geq \rho_0$**．**

既存の研究

移流拡散方程式に対する不連続 Galerkin 法 (DG 法) の誤差評価については次のようなものがある．

[HSS02] 分割が平行四辺形の場合の hp 評価．

[AM09] 次の仮定を加えた評価．

- ある $\eta \in W^{k+1,\infty}(\Omega)$ が存在し，$\beta \cdot \nabla\eta \geq 2\,\|\beta\|_{L^\infty(\Omega)} / \operatorname{diam}\Omega$ が成り立つ．
- ある正定数 c_β が存在し，$|\beta| \geq c_\beta\,\|\beta\|_{W^{1,\infty}(\Omega)}$ が成り立つ．
- ある正定数 c_ρ が存在し，shape-regular な三角形分割 $\mathcal{T}_h$ に対し，$\|\rho\|_{L^\infty(\Omega)} \leq c_\rho(\min_{x\in T}\rho(x) + \|\beta\|_{L^\infty(\Omega)} / \operatorname{diam}\Omega)$ が $T \in \mathcal{T}_h$ で成り立つ．

[ABCM01] β，γ が 0 の場合の評価．

[BMS04] ε が 0 の場合の評価．

2．DG 法のスキーム

DG 法のスキーム

- $\mathcal{T}_h$：Ω の conforming かつ shape-regular な三角形分割
- $h_K = \operatorname{diam} K$，$h = \max_{K \in \mathcal{T}_h} h_K$
- 区分的 Sobolev 空間
  $H^s(\mathcal{T}_h) := \{v \in L^2(\Omega) \colon v|_K \in H^s(K)\ ({}^\forall K \in \mathcal{T}_h)\}$
- $\mathcal{E}_h$：$K \in \mathcal{T}_h$ の辺 (または表面)e 全体の集合
- $\mathcal{E}_h^\circ$，$\mathcal{E}_h^\partial$：それぞれ Ω の内部，境界上にある辺 (または表面) 全体の集合
- $\mathcal{E}_h^D := \{e \in \mathcal{E}_h^\partial \colon e \subset \Gamma_D\}$，$\mathcal{E}_h^N$，$\mathcal{E}_h^+$，$\mathcal{E}_h^-$ についても同様
- DG 法の有限要素空間
  $V_h^k := \{v \in L^2(\Omega) \colon$ 各 $K \in \mathcal{T}_h$上 k 次以下の多項式 $\}$

DG 法のスキーム

$\phi \in H^s(\mathcal{T}_h)$ および $\tau \in H^s(\mathcal{T}_h)^d$ $(s > 1/2)$ に対し，$e \in \mathcal{E}_h$ 上の average および jump を次のように定める．

average$\{\!\{\cdot\}\!\}$ および jump$[\![\cdot]\!]$

K_1，$K_2 \in \mathcal{T}_h$: $e = K_1 \cap K_2$ を満たすもの
n_i : K_i における e 上の外向き単位法線ベクトルとして，

$$\{\!\{\phi\}\!\} := \frac{1}{2}(\phi|_{K_1} + \phi|_{K_2}), \quad [\![\phi]\!] := \phi|_{K_1} n_1 + \phi|_{K_2} n_2 \quad \text{on} \quad e \in \mathcal{E}_h^\circ$$

$$\{\!\{\tau\}\!\} := \frac{1}{2}(\tau|_{K_1} + \tau|_{K_2}), \quad [\![\tau]\!] := \tau|_{K_1} \cdot n_1 + \tau|_{K_2} \cdot n_2 \quad \text{on} \quad e \in \mathcal{E}_h^\circ$$

$$\{\!\{\phi\}\!\} := \phi, \quad [\![\phi]\!] := \phi|_K n, \quad \{\!\{\tau\}\!\} := \tau, \quad [\![\tau]\!] := \tau|_K \cdot n \quad \text{on} \quad e \in \mathcal{E}_h^\partial$$

DG 法のスキーム

各項に関する二次形式を次で定める．

$$a_h^d(u,v) := \sum_{K\in\mathcal{T}_h} \int_K \nabla u \cdot \nabla v dx - \sum_{e\in\mathcal{E}_h^\circ \cup \mathcal{E}_h^D} \int_e \{\!\{\nabla u\}\!\} [\![v]\!] ds + J(u,v) \quad (2)$$

$$J(u,v) := \sum_{e\in\mathcal{E}_h^\circ \cup \mathcal{E}_h^D} \frac{\sigma}{|e|} \int_e [\![u]\!][\![v]\!] ds \quad (3)$$

$$\begin{aligned} a_h^{rc}(u,v) := & \sum_{K\in\mathcal{T}_h} \int_K (-u\beta \cdot \nabla v + \gamma uv) dx \\ & + \sum_{e\in\mathcal{E}_h^\circ \cup \mathcal{E}_h^+} \int_e \{\!\{\beta u\}\!\} [\![v]\!] ds + \sum_{e\in\mathcal{E}_h^\circ} \frac{1}{2} \int_e |\beta \cdot n| \, [\![u]\!][\![v]\!] ds \end{aligned} \quad (4)$$

ただし，σ は正定数とする．

DG 法のスキーム

$$\begin{aligned}&\text{Find}\quad u_h \in V_h^k \quad \text{s.t.}\\ &a_h(u_h, v_h) = F_h(v_h) \quad {}^\forall v_h \in V_h^k\end{aligned} \tag{5}$$

ただし，

$$a_h(u, v) := \varepsilon a_h^d(u, v) + a_h^{rc}(u, v)$$

$$\begin{aligned}F_h(v) := \int_\Omega f v dx + \varepsilon\left(\sum_{e\in\mathcal{E}_h^D} \frac{\sigma}{|e|}\int_e g_D v ds + \sum_{e\in\mathcal{E}_h^N}\int_e g_N v ds\right)&\\ - \sum_{e\in\mathcal{E}_h^-}\int_e \beta\cdot n g_D v ds&\end{aligned} \tag{6}$$

スキームの適合性

定理 1 (適合性)

$s \geq 2$ とし，$u \in H^1(\Omega) \cap H^s(\mathcal{T}_h)$ が (1) の解であるとする．このとき，

$$a_h(u, v) = F_h(v) \quad v \in H^s(\mathcal{T}_h) \tag{7}$$

が成り立つ．

略証.

(1) に v を掛け，K 上で部分積分したものを足し合わせ，[ABCM01] における (3.3) の恒等式

$$\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial T} (\tau \cdot n) \phi ds = \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \int_e \{\!\{\tau\}\!\} [\![\phi]\!] ds + \sum_{e \in \mathcal{E}_h^\circ} \int_e [\![\tau]\!] \{\!\{\phi\}\!\} ds$$

を用いて整理し，u の $e \in \mathcal{E}_h^\circ$ 上の jump が 0 となることを用いればよい．

3．DG 法の誤差評価

誤差評価で用いる不等式

補題 1 (逆不等式)

K によらない正定数 C が存在し，

$$|v_h|_{H^1(K)} \leq C h_K^{-1} \|v_h\|_{L^2(K)} \quad {}^\forall v_h \in V_h^k \tag{8}$$

が成り立つ．

補題 2 (トレース不等式)

K によらない正定数 C が存在し，$e \subset \partial K$ に対し，

$$\|v\|_{L^2(e)} \leq C(\operatorname{diam} e)^{-1/2}(\|v\|_{L^2(K)} + h_K |v|_{H^1(K)}) \quad {}^\forall v \in H^1(K) \tag{9}$$

および，

$$\|v_h\|_{L^2(e)} \leq C h_K^{-1/2} \|v\|_{L^2(K)} \quad {}^\forall v_h \in V_h^k \tag{10}$$

が成り立つ．

拡散項の評価

拡散項の評価のために $H^s(\mathcal{T}_h)$ 上に次のノルムを定める．

$$\|v\|_d^2 := \sum_{K\in\mathcal{T}_h} |v|_{H^1(K)}^2 + J(v,v), \quad \|v\|_{d,*}^2 := \|v\|_d^2 + \sum_{K\in\mathcal{T}_h} h_K^2 |v|_{H^2(K)}^2$$

定理 2

正定数 σ を十分大きくとれば，h に依存しない正定数 C_i が存在し，

$$a_h^d(u,v) \le C_1 \|u\|_{d,*} \|v\|_d \quad {}^\forall u, v \in H^s(\mathcal{T}) \tag{11}$$

および，

$$a_h^d(v_h,v_h) \ge C_2 \|v_h\|_d^2 \quad {}^\forall v_h \in V_h^k \tag{12}$$

が成り立つ．

拡散項の評価

略証. (cf. [Riv08] 2.7.1).

(11) については Caucy-Schwartz の不等式とトレース不等式により従う．
$\delta > 0$ に対し，Young の不等式と多項式におけるトレース不等式より，

$$
\begin{aligned}
a_h^d(v_h, v_h) &\geq \|v_h\|_d^2 - \sum_{e \in \mathcal{E}_h^\circ \cup \mathcal{E}_h^D} \|\{\!\{\nabla v_h\}\!\}\|_{L^2(e)} \|[\![v_h]\!]\|_{L^2(e)} \\
&\geq \|v_h\|_d^2 - \sum_{e \in \mathcal{E}_h^\circ \cup \mathcal{E}_h^D} \left(\frac{|e|}{2\delta\sigma} \|\{\!\{\nabla v_h\}\!\}\|_{L^2(e)}^2 + \frac{\delta\sigma}{2|e|} \|[\![v_h]\!]\|_{L^2(e)}^2 \right) \\
&\geq \|v_h\|_d^2 - \frac{C}{2\delta\sigma} |v_h|_{H^1(K)}^2 - \frac{\delta}{2} J(v_h, v_h)
\end{aligned}
$$

となる．σ を十分大きく，δ を十分小さくとれば (12) が成り立つことが分かる． □

移流項の評価

移流項の評価のために次のノルムを定める．

$$\|v\|_{rc}^2 = \|\sigma_0^{1/2} v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{e\in\mathcal{E}_h} \| |\beta\cdot n| \, [\![v]\!] \|_{L^2(e)}^2 ,$$

$$\|v\|_{rc,*}^2 = \|v\|_{rc}^2 + \sum_{e\in\mathcal{E}_h} \| |\beta\cdot n| \, \{\!\{v\}\!\} \|_{L^2(e)}^2$$

また P_h^k を $L^2(\Omega)$ から V_h^k への L^2 射影とする．

定理 3

h に依存しない正定数 C_i が存在し，

$$a_h^{rc}(u - P_h^k u, v_h) \le C_3 \|u - P_h^k u\|_{rc,*} \|v_h\|_{rc} \quad {}^\forall u \in H^s(\mathcal{T}_h), {}^\forall v_h \in V_h^k \tag{13}$$

および，

$$a_h^{rc}(v, v) \ge C_4 \|v\|_{rc}^2 \quad {}^\forall v \in H^s(\mathcal{T}_h) \tag{14}$$

が成り立つ．

移流項の評価

略証. (cf.[BMS04] 5).

$\eta := u - P_h^k u$ **とすると，** $K \in \mathcal{T}_h$ **に対し，** $\int_K \eta (P_h^0 \beta) \cdot \nabla v_h dx = 0$ **となり，**

$$
\begin{aligned}
a_h^{rc}(\eta, v_h) &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K (\eta (P_h^0 \beta - \beta) \cdot \nabla v_h + \gamma \eta v_h) dx \\
&\quad + \Big(\sum_{e \in \mathcal{E}_h^\circ \cup \mathcal{E}_h^+} \int_e \{\!\{ \beta \eta \}\!\} [\![v]\!] ds + \sum_{e \in \mathcal{E}_h^\circ} \frac{1}{2} \int_e |\beta \cdot n| \, [\![\eta]\!] [\![v]\!] ds \Big) \\
&=: I_1 + I_2
\end{aligned}
$$

となる． □

移流項の評価

略証. (cf.[BMS04] 5).

L^2 射影の評価と逆不等式により，

$$
\begin{aligned}
|I_1| &\le C \sum_{K\in\mathcal{T}_h} \left(|\beta|_{W^{1,\infty}(K)} \|\nabla v_h\|_{L^2(K)}\, h_K + \|\gamma\|_{L^\infty(K)} \|v_h\|_{L^2(K)}\right) \|\eta\|_{L^2(K)} \\
&\le C(|\beta|_{W^{1,\infty}(\Omega)} + \|\gamma\|_{L^\infty(\Omega)}) \sum_{K\in\mathcal{T}_h} \|\eta\|_{L^2(K)} \|v_h\|_{L^2(K)}
\end{aligned}
$$

となる．同様に I_2 についても評価することで (13) が従う． □

移流項の評価

略証. (cf.[BMS04] 5).

$e \in \mathcal{E}_h^\circ$ に対し，$\{\!\{\beta v\}\!\}[\![v]\!] = \frac{1}{2}\{\!\{\beta\}\!\}[\![v^2]\!]$，$e \in \mathcal{E}_h^\partial$ に対し，$\{\!\{\beta v\}\!\}[\![v]\!] = \{\!\{\beta\}\!\}[\![v^2]\!]$ であり，部分積分により，

$$-\int_K v\beta \cdot \nabla v dx = \int_K v\beta \cdot \nabla v dx + \int_K v^2 \operatorname{div} \beta dx - \int_{\partial K} \beta \cdot n v^2 ds$$

であるから，

$$\begin{aligned} a_h^{rc}(v,v) &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \rho v^2 dx + \frac{1}{2} \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \int_e |\beta \cdot n| \, [\![v]\!]^2 ds \\ &\geq \frac{1}{2} \|v\|_{rc}^2 \end{aligned}$$

となる．□

全体の評価

次のノルムを定める．

$$\|v\|_{DG}^2 := \varepsilon \|v\|_d^2 + \|v\|_{rc}^2\text{，}\quad \|v\|_{DG,*}^2 := \varepsilon \|v\|_{d,*}^2 + \|v\|_{rc,*}^2$$

定理 2 と 3 より，次の評価が得られる．

定理 4

正定数 σ を十分大きくとれば，h，ε に依存しない正定数 C_b，C_c が存在し，

$$a_h(u - P_h^k u, v_h) \le C_b \|u - P_h^k u\|_{DG,*} \|v_h\|_{DG} \quad {}^\forall u \in H^s(\mathcal{T}_h), {}^\forall v_h \in V_h^k \tag{15}$$

および，

$$a_h(v_h, v_h) \ge C_c \|v_h\|_{DG}^2 \quad {}^\forall v_h \in V_h^k \tag{16}$$

が成り立つ．

解の存在と安定性

定理 5 (解の存在と安定性)

DG 法 (5) の解 $u_h \in V_h^k$ は一意に存在し，h，ε に依存しない正定数 C が存在し，

$$\|u\|_{DG} \leq C(\|f\|_{L^2(\Omega)} + (1+\varepsilon^{1/2})\|g_D\|_{L^2(\Gamma_D)} + \varepsilon^{1/2}\|g_N\|_{L^2(\Gamma_N)}) \quad (17)$$

が成り立つ．

略証.

a_h の強圧性より，

$$\begin{aligned}\|u_h\|_{DG}^2 &\leq Ca_h(u_h, u_h) = CF_h(u_h) \\ &\leq C(\|f\|_{L^2(\Omega)} + (1+\varepsilon^{1/2})\|g_D\|_{L^2(\Gamma_D)} + \varepsilon^{1/2}\|g_N\|_{L^2(\Gamma_N)})\|u_h\|_{DG}\end{aligned}$$

となる． □

スキームの誤差評価

$v \in H^s(\mathcal{T}_h)$，$e \subset K \in \mathcal{T}_h$ に対し，次の補間誤差

$$|v - P_h^k v|_{H^i(K)} \le C h^{\min\{k+1,s\}-i} \|v\|_{H^s(K)} \quad i = 0, 1 \tag{18}$$

$$\|v - P_h^k v\|_{L^2(e)} \le C h^{\min\{k+1,s\}-1/2} \|v\|_{H^s(e)} \tag{19}$$

が成り立つことから，DG 法の誤差評価が次のように得られる．

定理 6 (誤差評価)

$u \in H^s(\mathcal{T}_h)$，$u_h \in V_h^k$ をそれぞれ (1)，(5) の解とする．このとき，h，ε に依存しない正定数 C が存在し，

$$\|u - u_h\|_{DG} \le C(\varepsilon^{1/2} + h^{1/2}) h^{\min\{k+1,s\}-1} \|u\|_{H^s(\mathcal{T}_h)} \tag{20}$$

が成り立つ．ただし，$\|u\|^2_{H^s(\mathcal{T}_h)} := \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|u\|^2_{H^s(K)}$ である．

スキームの誤差評価

略証.

定理 4 より，

$$\|u_h - P_h^k u\|_{DG}^2 \le C a_h(u_h - P_h^k u, u_h - P_h^k u) = C a_h(u - P_h^k u, u_h - P_h^k u) \le C\|u - P_h^k u\|_{DG,*}\|u_h - P_h^k u\|_{DG}$$

となる．従って，

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|_{DG} &\le \|u - P_h^k\|_{DG} + \|u_h - P_h^k u\|_{DG} \\ &\le C\|u - P_h^k u\|_{DG,*} \\ &\le C(\varepsilon^{1/2} + h^{1/2}) h^{\min\{k+1,s\}-1} \|u\|_{H^s(\mathcal{T}_h)} \end{aligned}$$

となる． □

まとめと今後の課題

- 適切な仮定の下で移流拡散方程式の誤差評価をすることができた．
- ε が h に比べて 0 に近いとき，収束のオーダーが $\frac{1}{2}$ 増えることが確認できた．
- 今後は最大値原理といった方程式の持つ構造がどれだけ保つことができるか研究していきたい．

参考文献

[ABCM01] D. N. Arnold, F. Brezzi, B. Cockburn, and L. D Marini.
Unified analysis of discontinuous galerkin methods for elliptic problems.
SIAM J. Numer. Anal., 39(5):1749–1779, 2001.

[AM09] B. Ayuso and L. D. Marini.
Discontinuous galerkin methods for advection-diffusion-reaction problems.
SIAM J. Numer. Anal., 47(2):1391–1420, 2009.

[BMS04] F. Brezzi, L. D. Marini, and E. Süli.
Discontinuous galerkin methods for first-order hyperbolic problems.
Mathematical Models and Methods in Applied Sciences, 14(12):1893–1903, 2004.

[HSS02] P Houston, C Schwab, and E Süli.
Discontinuous hp-finite element methods for advection-diffusion-reaction problems.
SIAM Journal on Numerical Analysis, 39(6):2133–2163, 2002.

[Oik14] I Oikawa.
Hybridized discontinuous galerkin method for convection–diffusion problems.
Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics, 31(2):335–354, 2014.

[Riv08] B Rivière.
Discontinuous Galerkin methods for solving elliptic and parabolic equations : theory and implementation.
SIAM, Society for Industrial and Applied Mathematics, 2008.