# 非凸多面体領域におけるPoisson方程式の有限要素法の$L^\infty$評価

千葉悠喜，齊藤宣一 (東京大学大学院数理科学研究科) e-mail:ychiba@ms.u-tokyo.ac.jp

## 導入

$\Omega \subset \mathbb{R}^3$を有界多面体領域，$f \in L^2(\Omega)$，$g \in H^{1/2}(\partial\Omega)$とし，Poisson方程式

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega \\ u = g & \text{on } \partial\Omega \end{cases} \tag{1}$$

を有限要素法(FEM)で解くことを考える．$\{\mathcal{T}_h\}$を$\Omega$の準一様な四面体分割，すなわち，正定数$\gamma$が存在し，$h>0$と$K \in \mathcal{T}_h$に対し，$\rho_K \geq \gamma h$を満たすとする($\rho_K$は$K$の内接円の半径)．$r$を2以上の整数とし，$S^h$を各要素上で$r-1$次以下の多項式となる連続関数全体の空間，$\mathring{S}^h$を$S^h$の元であって$\Omega$の境界上で0となっているもの全体の空間とする．このとき，$D(u,\psi) := \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla\psi dx$としてFEM近似を

$$\begin{cases} D(u_h,\psi) = (f,\psi)_\Omega & ({}^\forall\psi \in \mathring{S}_h) \\ u_h = g_I & \text{on } \partial\Omega \end{cases} \tag{2}$$

とする．ただし，$g_I$は$g$の$\Omega$上の拡張の$S^h$へのLagrange射影とする．このとき，$u$と$u_h$の$L^\infty$誤差について，$\Omega$が凸領域の場合は[2]などで示されている．今回は，[3]で用いられた2次元非凸多角形領域における手法を3次元の場合に適用し，適当な仮定の下での誤差評価を示す．

## 仮定1

(i) ある$\frac{3}{2} < p \leq 2$が存在し，$f \in L^p(\Omega)$ならば$-\Delta u = f$の斉次Dirichlet条件における弱解が$u \in W^{2,p}(\Omega)$となる．

(ii) 凸多面体$\widetilde{\Omega} \supset\supset \Omega$が存在し，その準一様な四面体分割$\{\widetilde{\mathcal{T}_h}\}$であって，$\{\mathcal{T}_h\}$の拡張であり，定数$\gamma$が同じとなるものが存在する．

この仮定の(i)について，$\Omega$が凸領域ならば$p=2$として成り立つ．(i)を満たす多面体領域の十分条件は[1]で述べられている．この仮定の下で(1)の弱解は連続となる．

## 定理1

$\Omega \subset \mathbb{R}^3$を有界多面体領域，$\{\mathcal{T}_h\}$を準一様な四面体分割で仮定1を満たすとする．$u_h \in S^h$が，$D(u_h,\chi) = 0 \quad ({}^\forall\chi \in \mathring{S}^h)$を満たすとする．このとき，$h$に依存しない定数$C$が存在し，十分小さい$h$に対し，

$$\|u_h\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C \|u_h\|_{L^\infty(\partial\Omega)} \tag{3}$$

が成り立つ．

## 略証

$|u_h(x_0)| = \|u_h\|_{L^\infty(\Omega)}$となる$x_0 \in \Omega$に対し，$d = \mathrm{dist}(x,\partial\Omega)$，$\rho = \max\{d,h\}$とする．このとき，

$$\|u_h\|_{L^\infty(\Omega)} \leq c\rho^{-3/2}\|u_h\|_{L^2(S_\rho(x_0))}$$

となる．ここで，$S_\rho(x_0) := \{x \in \Omega \colon |x-x_0| < \rho\}$である．$\phi \in C_0^\infty(S_\rho(x_0))$に対し，$v \in H_0^1(\Omega)$，$v_h \in \mathring{S}^h$をそれぞれ

$$D(v,\psi) = (\phi,\psi)_\Omega \ ({}^\forall\psi \in H_0^1(\Omega)),\quad D(v_h,\chi) = (\phi,\chi)_\Omega \ ({}^\forall\chi \in \mathring{S}^h)$$

の解とする．このとき，

$$\|u_h\|_{L^\infty(\Omega)} \leq c(\rho^{-3/2}h^{-1}|v-v_h|_{W^{1,1}(\Lambda_h)} + 1)\|u_h\|_{L^\infty(\partial\Omega)}$$

となる．ただし，$\Lambda_h := \{x \in \Omega \colon \mathrm{dist}(x,\partial\Omega) < h\}$である．$d_j = \mathrm{diam}(\Omega)2^{-j}$とし，$A_j := \{x \in \Omega \colon d_{j+1} < |x-x_0| < d_j\}$，$J = \min\{m \in \mathbb{Z} \colon m \geq \log_2 \frac{\mathrm{diam}(\Omega)}{8\rho}\}$とする．このとき，仮定1-(i)より，

$$\begin{aligned} \rho^{-3/2}h^{-1}|v-v_h|_{W^{1,1}(\Lambda_h)} &\leq c\sum_{j=0}^{J}\rho^{-1}h^{-1/2}d_j|v-v_h|_{H^1(\Lambda_h\cap A_j)} \\ &\quad + ch^{-1/2}|v-v_h|_{H^1(\Lambda_h \cap S_{8\rho}(x_0))} \\ &\leq c(h^{2-3/p} + h^{9/2-6/p}\rho^{3/p-5/2})\sum_{j=0}^{J} d_j^{3/p-3/2} \\ &\quad + ch^{2-3/p}\rho^{3/p-3/2} \end{aligned}$$

となる．$\frac{3}{2} < p \leq 2$と$h \leq \rho$であること，および$\lim_{h\to 0} h^{1/2}\log h = 0$であることから(3)が従う．

## 定理2

$\Omega \subset \mathbb{R}^3$を有界多面体領域，$\{\mathcal{T}_h\}$を準一様な四面体分割で仮定1を満たすとする．$u \in C(\overline{\Omega})$とする．$u_h \in S^h$が，

$$D(u_h,\chi) = D(u,\chi) \quad ({}^\forall\chi \in \mathring{S}^h)$$

かつ$\partial\Omega$上$u_h = u_I$を満たすとする．ただし，$u_I$は$u$の$S^h$へのLagrange射影である．このとき，$h$に依存しない定数$C$が存在し，十分小さい$h$と$\chi \in S^h$に対し，

$$\|u-u_h\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C|\log h|^{\overline{r}}\|u-\chi\|_{L^\infty(\Omega)} \tag{4}$$

が成り立つ．ただし，

$$\overline{r} = \begin{cases} 1 & r=2 \\ 0 & r>2 \end{cases} \tag{5}$$

である．特に，$u \in C^r(\overline{\Omega})$ならば，

$$\|u-u_h\|_{L^\infty(\Omega)} \leq Ch^r|\log h|^{\overline{r}}\|u\|_{C^r(\overline{\Omega})} \tag{6}$$

が成り立つ．

## 数値計算

$L = ((0,0.5)\times(0,1)) \cup ((0,1)\times(0,0.5))$
$\Omega = \{((1-\frac{z}{2})x,(1-\frac{z}{2})y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon (x,y) \in L, 0<z<1\}$とすると$\Omega$は仮定1を満たす．
Poisson方程式の解が

$$u(x,y,z) = (2-z)^4 \sin\frac{2\pi x}{2-z}\sin\frac{2\pi y}{2-z}\sin\pi z + xyz$$

となる問題について，区分的1次多項式($r=2$)を用いて数値計算を行うと$L^\infty$誤差は図1のようになった．グラフより，$\|u-u_h\|_{L^\infty(\Omega)}$は$h^2$より少し遅いオーダーで収束しており，(6)において$r=2$とした評価が成り立っていることがわかる．

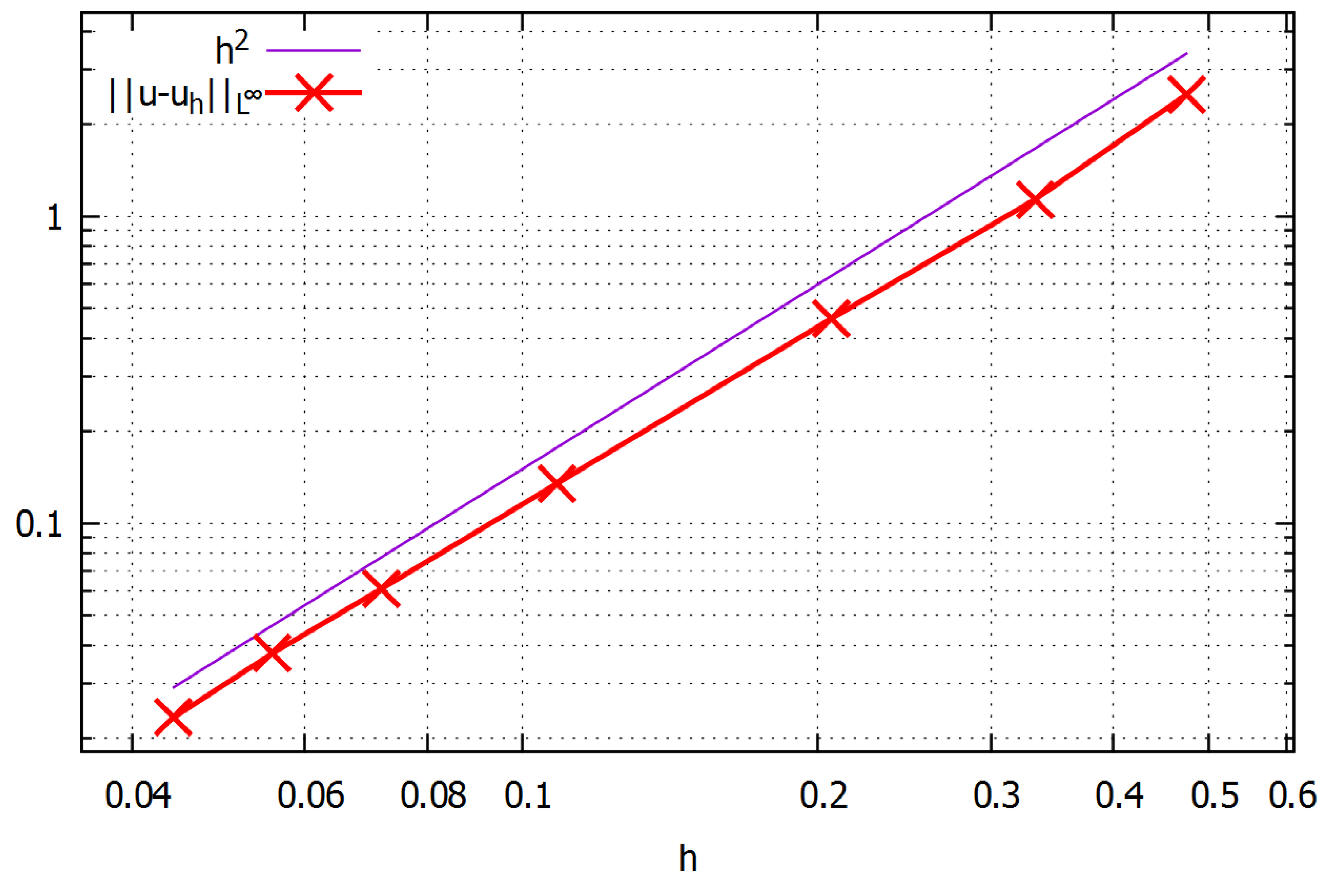


図 1: 数値例

## 参考文献

[1] P. Grisvard, *Behavior of solutions of an elliptic boundary value problem in a polygonal or polyhedral domain,* in Numerical Solution of Partial Differential Equations III : SYNSPADE 1975, B. Hubbard, Editor, Academic Press, New York, (1975), 207-274.

[2] J. Guzmán, et al, *Hölder estimates for Green's functions on convex polyhedral domains and their applications to finite element methods,* Numerische Mathematik, **112** (2009), 221–243.

[3] A. H. Schatz, *A Weak Discrete Maximum Principle and Stability of the Finite Element Method in $L_\infty$ on the Plane Polygonal Domains. I*, Math. Comp. **34** (1980), 77-91.