

数値解析と不連続 Galerkin 法

千葉悠喜

東京大学大学院数理科学研究科 博士課程 1 年

応用数学フレッシュマンセミナー 2017

京都大学

平成 29 年 11 月 11 日

1. 数値解析

2. 不連続 Galerkin 法

- DG 法のスキーム
- DG 法の解析
- 数値計算
- 自分の研究

1 . 数值解析

数値解析

解くのが“困難”な問題に対し、その近似解を求める方法を導出し、その“妥当性”を検証する分野.

問題 (PDE など)

困難
→

厳密解

数値解析

数値解析

解くのが“困難”な問題に対し、その近似解を求める方法を導出し、その“妥当性”を検証する分野.

問題 (PDE など)

↓ 離散化など

近似問題

困難

→

→

(比較的) 容易

厳密解

↑ 収束, 誤差評価など

近似解

PDE の数値解析において重要なのは次の点

可解性

近似問題の解は存在するか？ 現実的に解くことができるか？

収束性

厳密解 u と近似解 u_N は $N \rightarrow \infty$ としたとき $u_N \rightarrow u$ となっているか？
その誤差 $\|u - u_N\|$ は N などを用いてどう評価されるか？

構造保存

厳密解が持っている性質と同様の性質を近似解でも保っているか？

偏微分方程式の数値計算手法

差分法 (Finite Difference Method)

領域を格子状に切り，微分を格子点上の値を用いた差分に置き換えて計算を行う。

有限要素法 (Finite Element Method)

領域を三角形などの小さな要素に分割し，各要素上で多項式となるような関数を用いて近似を行う。

有限体積法 (Finite Volume Method)

領域を小さな要素に分割し，保存量に注目して区分的定数関数を用いて近似を行う。

2. 不連続 Galerkin 法

不連続 Galerkin 法 (DG 法)

1973 年に Reed と Hill によって提唱された, 各要素上で多項式となる不連続関数を用い, 要素間の連続性を数値流速と呼ばれる値を用いて制御して計算する数値解法.

参考文献

- D. N. Arnold, F. Brezzi, B. Cockburn and L. D. Marini,
Unified analysis of discontinuous Galerkin methods for elliptic problems,
SIAM J. Numer. Anal., 39(5), 2002, 1749–1779.
- B. Rivière,
Discontinuous Galerkin Methods for Solving Elliptic and Parabolic Equations: Theory and Implementation,
SIAM Frontiers in Applied Mathematics, 2008.

モデル問題 (Poisson 方程式)

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases} \quad (\text{P})$$

$\Omega \subset \mathbb{R}^2$: 有界凸多角形領域, $f \in L^2(\Omega)$

弱形式

$$\begin{aligned} &\text{Find } u \in H_0^1(\Omega) \text{ s.t.} \\ &a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx = (f, v)_{\Omega} \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \end{aligned} \quad (\text{Pw})$$

DG 法-準備

\mathcal{T}_h : Ω の三角形分割, $h_K = \text{diam } K$, ρ_K : K の内接円半径, $h = \max_{K \in \mathcal{T}_h} h_K$

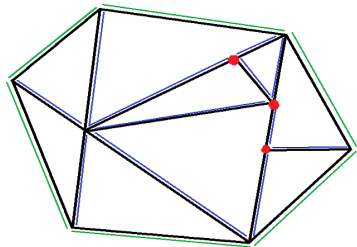
$h_K/\rho_K \leq C$, 隣接する K_1, K_2 について $h_{K_1}/h_{K_2} \leq C$

K の一辺上にある hanging node の数: h について有界

$\mathcal{E}_h^0 := \{e : \exists K_1, K_2 \in \mathcal{T}_h \text{ s.t. } K_1 \neq K_2, e = \partial K_1 \cap \partial K_2, |e| > 0\}$

$\mathcal{E}_h^\partial := \{e : \exists K \in \mathcal{T}_h \text{ s.t. } e \text{ は } K \text{ の辺}, e \subset \partial\Omega, |e| > 0\}$

$\mathcal{E}_h := \mathcal{E}_h^0 \cup \mathcal{E}_h^\partial$, $h_e = \min_{e \subset \partial K, K \in \mathcal{T}_h} \{h_K\}$



青: \mathcal{E}_h^0 , 緑: \mathcal{E}_h^∂

\mathcal{T}_h : Ω の三角形分割, $h_K = \text{diam } K$, ρ_K : K の内接円半径, $h = \max_{K \in \mathcal{T}_h} h_K$

$h_K/\rho_K \leq C$, 隣接する K_1, K_2 について $h_{K_1}/h_{K_2} \leq C$

K の一辺上にある hanging node の数: h について有界

$\mathcal{E}_h^0 := \{e : \exists K_1, K_2 \in \mathcal{T}_h \text{ s.t. } K_1 \neq K_2, e = \partial K_1 \cap \partial K_2, |e| > 0\}$

$\mathcal{E}_h^\partial := \{e : \exists K \in \mathcal{T}_h \text{ s.t. } e \text{ は } K \text{ の辺}, e \subset \partial\Omega, |e| > 0\}$

$\mathcal{E}_h := \mathcal{E}_h^0 \cup \mathcal{E}_h^\partial$, $h_e = \min_{e \subset \partial K, K \in \mathcal{T}_h} \{h_K\}$

関数空間

$$H^s(\mathcal{T}_h) := \{v \in L^2(K) : v|_K \in H^s(K) \quad \forall K \in \mathcal{T}_h\}$$

$$V_h = V_h^k := \{v_h \in L^2(K) : v_h|_K \in \mathcal{P}_k(K) \quad \forall K \in \mathcal{T}_h\}$$

$$T(\mathcal{E}_h) := \prod_{K \in \mathcal{T}_h} L^2(\partial K)$$

DG 法-準備

$q \in T(\mathcal{E}_h)$, $\phi \in (T(\mathcal{E}_h))^2$ と $e \in \mathcal{E}_h$ に対し, $\{\cdot\}$ および $[\cdot]$ を次で定める.

- $e \in \mathcal{E}_h^0$ のとき,

$$\{\{q\}\} := \frac{1}{2}(q_1 + q_2), \quad [q] := q_1 n_1 + q_2 n_2$$

$$\{\{\phi\}\} := \frac{1}{2}(\phi_1 + \phi_2), \quad [\phi] := \phi_1 \cdot n_1 + \phi_2 \cdot n_2$$

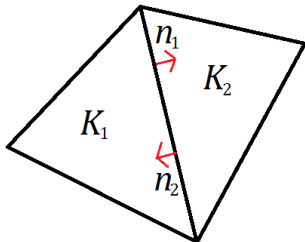
- $e \in \mathcal{E}_h^\partial$ のとき,

$$\{\{q\}\} := q, \quad [q] := qn, \quad \{\{\phi\}\} := \phi, \quad [\phi] := \phi \cdot n$$

$$v_i = v|_{K_i}, \quad \phi_i = \phi|_{K_i}$$

n_i : K_i の e における外向き単位法線ベクトル

n : $\partial\Omega$ における外向き単位法線ベクトル



DG 法-スキーム

$\sigma = \nabla u$ とし, テスト関数 v, τ を用いて (P) を整理する.

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} \sigma \cdot \tau \, dx &= - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K u \nabla \cdot \tau \, dx + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial K} u n_K \cdot \tau \, ds \\ \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \sigma \cdot \nabla v \, dx &= \int_{\Omega} f v \, dx + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial K} \sigma \cdot n_K v \, ds\end{aligned}$$

∂K における積分の u, σ を数値流速 $\hat{u} = \hat{u}(u) \in T(\mathcal{E}_h)$,
 $\hat{\sigma} = \hat{\sigma}(u, \sigma) \in (T_h(\mathcal{E}_h))^2$ に置き換える.

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} \sigma \cdot \tau \, dx &= - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K u \nabla \cdot \tau \, dx + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial K} \hat{u} n_K \cdot \tau \, ds \\ \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \sigma \cdot \nabla v \, dx &= \int_{\Omega} f v \, dx + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial K} \hat{\sigma} \cdot n_K v \, ds\end{aligned}$$

σ を u を用いて表し、整理することで次の双線形形式が得られる。

双線形形式

$$\begin{aligned}
 B_h(u, v) &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \nabla u \cdot \nabla v \, dx \\
 &+ \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \int_e ([\hat{u} - u] \cdot \{\{\nabla v\}\} - \{\{\hat{\sigma}\}\} \cdot [v]) \, ds \\
 &+ \sum_{e \in \mathcal{E}_h^0} \int_e (\{\{\hat{u} - u\}\} [\nabla v] - [\hat{\sigma}] \{\{v\}\}) \, ds
 \end{aligned}$$

$$\hat{u} = \hat{u}(u), \quad \hat{\sigma} = \hat{\sigma}(u, \sigma(u))$$

$$\sigma(u) = \nabla u - r([\hat{u} - u]) - l(\{\{\hat{u} - u\}\})$$

r, l : 適当な条件を満たす $(V_h)^2$ へのリフト関数

DG スキーム

$$\begin{aligned} \text{Find } u_h \in V_h \text{ s.t.} \\ B_h(u_h, v_h) = (f, v_h)_\Omega \quad \forall v_h \in V_h \end{aligned} \quad (1)$$

定理 1 (適合性)

$u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ に対し,

$$\hat{u}(u) = u, \hat{\sigma}(u, \nabla u) = \nabla u$$

が成り立つならば, (Pw) の解 u に対し,

$$B_h(u, v) = (f, v)_\Omega \quad \forall v \in H^2(\mathcal{T}_h)$$

が成り立つ.

DG 法の例-IPDG 法

$$\begin{aligned}
 B_h(u, v) = & \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \nabla u \cdot \nabla v \, dx \\
 & - \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \int_e (\{\nabla u\} [\nabla v] + \alpha [u] \{\nabla v\}) \, ds \\
 & + \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \int_e \frac{\eta_e}{h_e} [u] [v] \, ds
 \end{aligned} \tag{IP}$$

$\eta_e > 0$ 十分大きい定数, α 定数

$\alpha = 1$ のとき SIPG 法, $\alpha = 0$ のとき IIPG 法, $\alpha = -1$ のとき NIPG 法

数値流速

$$\hat{u} = \{u\} + \frac{1-\alpha}{2} n_K \cdot [u]$$

$$\hat{\sigma} = \{\nabla u\} - \eta_e h_e^{-1} [u]$$

定理 2 (適合性)

双線形形式 (IP) に対し, α, η_e の選び方によらず, (Pw) の解 u について,

$$B_h(u, v) = (f, v)_\Omega \quad \forall v \in H^2(\mathcal{T}_h)$$

が成り立つ. さらに SIPG 法に対し,

$$B_h(v, u) = (f, v)_\Omega \quad \forall v \in H^2(\mathcal{T}_h)$$

が成り立つ.

DG 法-スキームの解析

$H^2(\mathcal{T}_h)$ に次のノルムを定める.

$$\|u\|_h^2 := \sum_{K \in \mathcal{T}_h} |u|_{H^1(K)}^2 + \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \eta_e h_e^{-1} \|[[u]]\|_{L^2(e)}^2$$

$$\|u\|_{h,*}^2 := \|u\|_h^2 + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K^2 |u|_{H^2(K)}^2$$

定理 3 (連続性, 強圧性)

双線形形式 (IP) に対し, η_e を十分大きくすると,

$$B_h(u, v) \leq C \|u\|_{h,*} \|v\|_{h,*} \quad \forall u, v \in H^2(\mathcal{T}_h)$$

$$B_h(v_h, v_h) \geq C \|v_h\|_h^2 \quad \forall v_h \in V_h$$

が成り立つ.

定理 4 (DG スキームの解の存在, 誤差評価)

双線形形式 (IP) を用いた DG 法の解 $u_h \in V_h$ は一意に存在する. さらに, $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ を (Pw) の解とすると Galerkin 直交性

$$B_h(u - u_h, v_h) = 0 \quad \forall v_h \in V_h \quad (2)$$

が成り立ち, $u \in H^{k+1}(\Omega)$ ならば

$$\|u - u_h\|_h \leq Ch^k \quad (3)$$

が成り立つ. 加えて, SIPG 法ならば

$$\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch^{k+1} \quad (4)$$

が成り立つ.

標準的な有限要素法と比較

利点

- 分割や基底の自由度が高い
- 移流項が支配的な移流拡散方程式に強い
- (個人的に) 数値計算の実装がしやすい

難点

- 近似解が不連続になる
- DoF が大きい
- 出てくる行列の条件数が大きくなってしまふ

数値計算

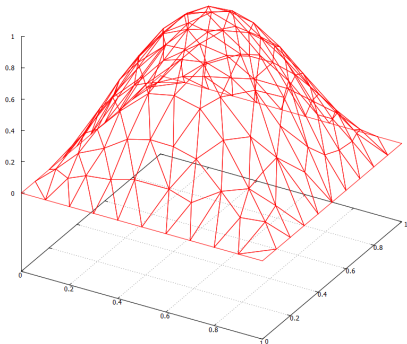
$\Omega = [0, 1]^2$, 厳密解 $u(x, y) = \sin(\pi x) \sin(\pi y)$ となるように f を選び, 標準的な有限要素法と SIPG 法で P1 要素を用いて数値計算を行った.

実装:FreeFEM++ 3.26-3

$h = 0.152069$ での計算結果

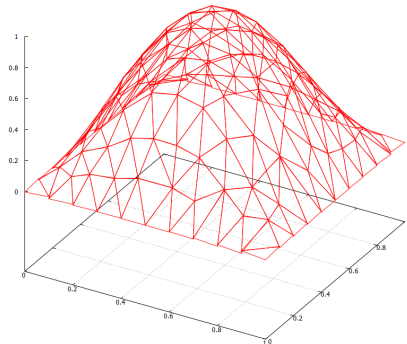
有限要素法

DoF:102, 条件数:約 39



SIPG 法

DoF:726, 条件数:約 856



数値計算

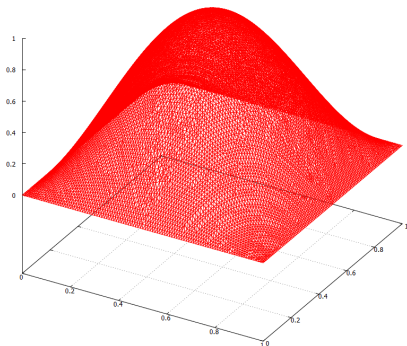
$\Omega = [0, 1]^2$, 厳密解 $u(x, y) = \sin(\pi x) \sin(\pi y)$ となるように f を選び, 標準的な有限要素法と SIPG 法で P1 要素を用いて数値計算を行った.

実装:FreeFEM++ 3.26-3

$h = 0.0192668$ での計算結果

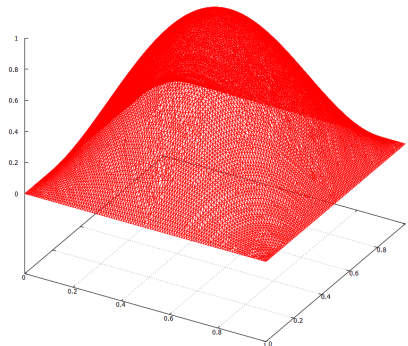
有限要素法

DoF:11683, 条件数:約 4024



SIPG 法

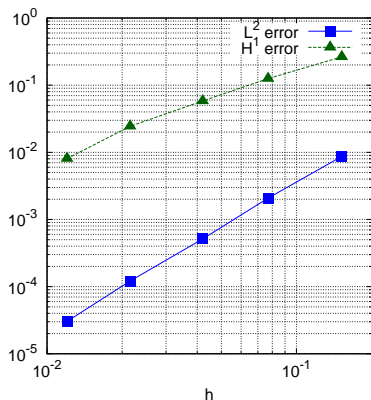
DoF:71292, 条件数:約 81784



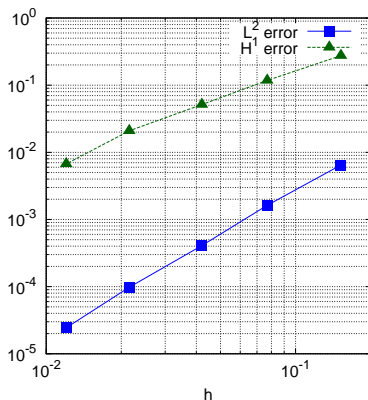
数値計算

L^2 ノルム, H^1 セミノルムでの誤差のグラフはそれぞれ次のようになった。

有限要素法



SIPG 法



L^2 ノルム : $O(h^2)$, H^1 セミノルム : $O(h)$

自分の研究

DG 法の L^∞ 評価と構造保存について研究している。(齊藤先生と共同研究)

非凸多角形領域上の非斉次 Diriclet 境界条件における Poisson 方程式について、適当な仮定の下で

$$\|u - u_h\|_{L^\infty(\Omega)} \leq Ch^k + C \|u - u_h\|_{L^\infty(\partial\Omega)}$$

が成り立つ。

球対称 Poisson 方程式から誘導される 1 次元移流拡散方程式に対し、適当な仮定の下で

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|_{L^\infty(I)} &\leq Ch^{k+1} + C \max_{i \in \Lambda} |(u - u_h)^i(x_{i+1})| \\ \max_{i \in \Lambda} \|(u - u_h)_x\|_{L^\infty(K_i)} &\leq Ch^k + C \max_{i \in \Lambda} |(u - u_h)^i(x_{i+1})| \end{aligned}$$