多角形領域上の Poisson 方程式に対する不連続 Galerkin 法の L^∞ 誤差評価

千葉悠喜　　齊藤宣一

東京大学大学院 数理科学研究科

日本数学会 2017 年度年会
平成 29 年 3 月 26 日

目次

1．はじめに

はじめに

不連続 Galerkin 法 (DG 法)

- 1973 年に Reed と Hill によって提唱された，各要素上で多項式となる不連続関数を用い，要素間の連続性を数値流速と呼ばれる値を用いて制御して計算する数値解法．
- L^2 ノルム，エネルギーノルムによる解析：[ABCM02] や [AM09] など多く行われている．
- L^p ノルムによる解析：[CC04](L^∞ ノルム，滑らかな領域)，あまり行われていない．

$\rightarrow$DG 法の非線形問題に対する解析が進まない一因になっている．

一方，有限要素法では L^p ノルムによる解析も多く行われている．

[Sch80] を参考にし，**凸とは限らない**多角形領域における L^∞ ノルムによる解析を行う．

2. 準備

準備-Poisson 方程式

Poisson 方程式

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in} \quad \Omega \\ u = g & \text{on} \quad \partial\Omega \end{cases} \tag{1}$$

$\Omega \subset \mathbb{R}^2$：凸とは限らない多角形領域
$f \in L^2(\Omega)$，$g \in H^{1/2}(\partial\Omega)$

$g = 0$ としたとき，その弱解は $u \in H_0^1(\Omega)$ であって，

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx = (f, v)_\Omega \quad {}^\forall v \in H_0^1(\Omega) \tag{2}$$

を満たすものである．

Ω の最大角を $0 < \alpha < 2\pi$ とし，$\beta = \pi/\alpha$ とする．

命題 1 ([Gri76])

$u \in H_0^1(\Omega)$ が (2) を満たすとすると以下が成り立つ．

(i) Ω が凸多角形 ($\beta > 1$) のとき，$u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ であり，

$$|u|_{H^2(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)}$$

となる．

(ii) Ω が非凸多角形 ($1/2 < \beta < 1$) かつ，ある $1 < p < 2/(2-\beta)$ に対し $f \in L^p(\Omega)$ とする．このとき，$u \in W^{2,p}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ であり，Ω と p のみに依存した正定数 C が存在し，

$$\|u\|_{W^{2,p}(\Omega)} \leq C \|f\|_{L^p(\Omega)}$$

となる．

準備-関数空間と記号

$\mathcal{T}_h$：Ω の正則かつ準一様な三角形分割とする．つまり，正定数 C が存在して，

$$\frac{h_K}{\rho_K} \leq C \,, \frac{h}{h_K} \leq C \tag{3}$$

が成り立つとする．

($h_K := \operatorname{diam} K$，$\rho_K$：$K$ の内接円半径，$h := \max_{K\in\mathcal{T}_h} h_K$)

$x_0 \in \Omega$ と $d > 0$ に対し，$S_d(x_0) := \{x \in \Omega \colon |x - x_0| < d\}$ とする．

$d(\Omega_0, \Omega_1) := \operatorname{dist}(\Omega_0, \partial\Omega_1)$，$d_\Omega(\Omega_0, \Omega_1) := \operatorname{dist}(\Omega_0, \partial\Omega_1 \setminus \partial\Omega)$ とする．

関数空間

$V^p := \{v \in L^p(\Omega) \colon v|_K \in W^{1,p}(K), (\nabla v)|_{\partial K} \in L^p(\partial K)\ {}^\forall K \in \mathcal{T}_h\}$

$V^p(\Omega_0)$：V^p の Ω_0 への制限，$\mathring{V}^p(\Omega_0) := \{v \in V^p(\Omega_0) \colon \operatorname{supp} v \subset \Omega_0\}$

$V_h = V_h^r(\Omega) := \{v_h \in L^2(\Omega) \colon$ 各 $K \in \mathcal{T}_h$ 上 $v_h|_K$ は r 次以下の多項式 $\}$

$V_h(\Omega_0)$，$\mathring{V}_h(\Omega_0)$ も同様に定める．

準備-ノルム

$\mathcal{E}_h$：$K \in \mathcal{T}_h$ の辺全体からなる集合
$\mathcal{E}_h^{\partial}$，$\mathcal{E}_h^{\circ}$：それぞれ Ω の境界上，内部にある辺全体の集合
$v \in V^p$ と $e \in \mathcal{E}_h$ に対し，$\{\!\{\cdot\}\!\}$ および $[\![\cdot]\!]$ を次で定める．

- $e \in \mathcal{E}_h^{\circ}$ のとき，

$$\{\!\{v\}\!\} := \frac{1}{2}(v_1 + v_2)\,,\ [\![v]\!] := v_1 n_1 + v_2 n_2$$
$$\{\!\{\nabla v\}\!\} := \frac{1}{2}(\nabla v_1 + \nabla v_2)\,,\ [\![\nabla v]\!] := \nabla v_1 \cdot n_1 + \nabla v_2 \cdot n_2$$

- $e \in \mathcal{E}_h^{\partial}$ のとき，

$$\{\!\{v\}\!\} := v\,,[\![v]\!] := vn\,,\{\!\{\nabla v\}\!\} := \nabla v\,,[\![\nabla v]\!] := \nabla v \cdot n$$

$v_i = v|_{K_i}$ （$e \in \mathcal{E}_h^{\circ}$ に対し，K_1，K_2 は $e \subset \partial K_1 \cap \partial K_2$ を満たす）
n_i：K_i の e における外向き単位法線ベクトル
n：$\partial\Omega$ における外向き単位法線ベクトル

準備-ノルム

$V^p(\Omega)$ のノルム

- $1 \leq p < \infty$ **のとき，**

$$\|v\|^p_{V^p(\Omega_0)} := \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|v\|^p_{W^{1,p}(K\cap\Omega_0)} + \sum_{e \in \mathcal{E}_h} h_e^{1-p} \|[\![v]\!]\|^p_{L^p(e\cap\overline{\Omega}_0)} + \sum_{e \in \mathcal{E}_h} h_e \|\{\!\{\nabla v\}\!\}\|^p_{L^p(e\cap\overline{\Omega}_0)}$$

- $p = \infty$ **のとき，**

$$\|v\|_{V^\infty(\Omega_0)} := \max_{K \in \mathcal{T}_h} \|v\|_{W^{1,\infty}(K\cap\Omega_0)} + \max_{e \in \mathcal{E}_h} h_e^{-1} \|[\![v]\!]\|_{L^\infty(e\cap\overline{\Omega}_0)} + \max_{e \in \mathcal{E}_h} \|\{\!\{\nabla v\}\!\}\|_{L^\infty(e\cap\overline{\Omega}_0)}$$

ただし， $e \in \mathcal{E}_h^\circ$ **のとき，** $h_e = (h_{K_1} + h_{K_2})/2$ **であり，** $e \in \mathcal{E}_h^\partial$ **のとき，** $h_e = h_K$**.**

準備-DG 法のスキーム

双一次形式と線形形式

$u \in V^p$, $v \in V^{p'}$ に対し，

$$a(u,v) := \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \nabla u \cdot \nabla v dx$$

$$- \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \int_e (\{\!\{\nabla u\}\!\}[\![v]\!] + \{\!\{\nabla v\}\!\}[\![u]\!]) ds + \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \frac{\sigma}{h_e} \int_e [\![u]\!][\![v]\!] ds$$

$$F(v) := \int_\Omega f v dx + \sum_{e \in \mathcal{E}_h^\partial} \int_e g \left(\frac{\sigma}{h_e} v - \nabla v \cdot n \right) ds$$

σ は十分大きな正定数

準備-DG 法のスキーム

DG 法のスキーム

$$
\begin{aligned}
&\text{Find} \quad u_h \in V_h \quad \text{s.t.} \\
&a(u_h, \chi) = F(\chi) \quad {}^\forall \chi \in V_h
\end{aligned}
\tag{4}
$$

命題 2 (適合性)

(1) **の解** u **が，ある** $s > \frac{3}{2}$ **に対し** $u \in H^s(\Omega)$ **とする．このとき，**

$$
a(u, v) = F(v) \quad {}^\forall v \in V^2 \tag{5}
$$

が成り立つ．特に，$u_h \in V_h$ **が** (4) **の解ならば** Galerkin **直交性**

$$
a(u - u_h, \chi) = 0 \quad {}^\forall \chi \in V_h \tag{6}
$$

が成り立つ．

主結果

後に述べる仮定 1(近似に関する仮定)，仮定 2(領域と分割に関する仮定) のもとで次の定理が成り立つ．

定理 3

$u \in V^\infty$ と $u_h \in V_h$ が

$$a(u - u_h, \chi) = 0 \quad {}^\forall \chi \in V_h$$

を満たすとする．このとき，仮定 1，2 のもとで，h，u，u_h に依存しない正定数 C が存在し，十分小さな h に対し，

$$\|u - u_h\|_{L^\infty(\Omega)} \le C \left(\inf_{\chi \in V_h} \|u - \chi\|_{*,\Omega} + \|u - u_h\|_{L^\infty(\partial\Omega)} \right)$$

が成り立つ．

この定理の証明のために定理 1(内部誤差評価)，定理 2(弱最大値原理) が必要であり，定理 1 の証明のために円板上の評価を示す．

3．円板上における評価

円板上における評価

$D \subset\subset \Omega$：中心 x_0，半径 R の開円板としてその上の偏微分方程式

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{in} \quad D \\ \partial_n u = 0 & \text{on} \quad \partial D \end{cases} \tag{7}$$

を考える．ただし，∂_n は ∂D における法線微分である．

命題 3 ([Sch63], [BS73])

(i) ある $1 < p < \infty$ に対し，$f \in L^p(D)$ ならば，(7) の解 $u \in W^{2,p}(D)$ が存在し，

$$\|u\|_{W^{2,p}(D)} \leq C \|f\|_{L^p(D)} \tag{8}$$

が成り立つ．

(ii) $f \in L^1(D)$ ならば，(7) の弱解 $u \in W^{1,1}(D)$ が存在し，

$$\|u\|_{W^{1,1}(D)} \leq C \|f\|_{L^1(D)} \tag{9}$$

が成り立つ．

円板上における評価

(7) **に対応した二次形式**

$$a_D^1(u,v) := \sum_{K\in\mathcal{T}_h}\int_{K\cap D}(\nabla u\cdot\nabla v + uv)dx$$
$$- \sum_{e\in\mathcal{E}_h}\int_{e\cap\overline{D}}(\{\!\{\nabla u\}\!\}[\![v]\!] + \{\!\{\nabla v\}\!\}[\![u]\!])ds + \sum_{e\in\mathcal{E}_h}\frac{\sigma}{h_e}\int_{e\cap\overline{D}}[\![u]\!][\![v]\!]ds$$

a_D^1 **について** Ω **上の** Poisson **方程式と同様の性質が成り立つ．**

$f\in L^2(D)$ **に対し，** $\Pi_D^1 f\in H^2(D)$ **を** (7) **の解とし，** $\Pi_h^1 f\in V_h(D)$ **を**

$$a_D^1(\Pi_D^1 f - \Pi_h^1 f, \chi) = 0 \quad {}^\forall\chi\in V_h(D)$$

で定める．

円板上における評価

次の仮定を考える．

仮定 1

0 **の近傍で有界な関数** $\alpha\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ **が存在し，** h **に依存しない正定数** C **が存在し，十分小さい** h **に対し，**

$$a_D^1(\Pi_D^1 f - \Pi_h^1 f, v) \le Ch\alpha(h) \|f\|_{L^2(D)} \|v\|_{V^\infty(D)} \quad {}^\forall f \in L^2(D), {}^\forall v \in V^\infty(D) \tag{10}$$

が成り立つ．

ノルム $\|\cdot\|_{*,\Omega_0}$

$$\|v\|_{*,\Omega_0} := \|v\|_{L^\infty(\Omega_0)} + \alpha(h) \|v\|_{V^\infty(\Omega_0)}$$

a_D^1 **の性質より** $\alpha(h) = 1$ **ととれる．**

円板上における評価

仮定 1 **のもとで，次が成り立つ．**

補題 1

$\tilde{u} \in V^{\infty}(D)$ **が** $\operatorname{supp} \tilde{u} \subset \frac{1}{2}D$ **を満たすとする．** $\tilde{u}_h \in V_h(D)$ **が**

$$a_D^1(\tilde{u} - \tilde{u}_h, \chi) = 0 \quad {}^{\forall}\chi \in V_h(D)$$

を満たすとする．このとき，十分小さい h **に対し，**

$$\|\tilde{u} - \tilde{u}_h\|_{L^{\infty}(\frac{1}{4}D)} \leq C \|\tilde{u}\|_{*,D} \tag{11}$$

が成り立つ．

4．内部誤差評価

内部誤差評価

DG 法の内部誤差評価について次が成り立つ．

定理 1

κ を正定数とし，開集合 $\Omega_0 \subset \Omega_1 \subset \Omega$ が $d = d(\Omega_0, \Omega_1) \geq \kappa h$ を満たすとする．$u \in V^\infty$ および，$u_h \in V_h$ が

$$a(u - u_h, \chi) = 0 \quad {}^\forall \chi \in \mathring{V}_h$$

を満たすとする．このとき，仮定 1 のもとで，h，u，u_h に依存しない正定数 C が存在し，十分小さな h に対し，

$$\|u - u_h\|_{L^\infty(\Omega_0)} \leq C \left(\inf_{\chi \in V_h} \|u - \chi\|_{*,\Omega_1} + \|u - u_h\|_{L^2(\Omega_1)} \right) \tag{12}$$

が成り立つ．

内部誤差評価-定理 1 の略証

略証

まず，二次形式を $a^1(u,v) := a(u,v) + \int_\Omega uvdx$ としたものについて同様の評価が成り立つことを示す．

$R < d$ として，D を中心 $x_0 = \mathrm{argmax}_{x\in\Omega_0} |u(x) - u_h(x)|$，半径 R の開円板とする．

$\omega \in C_0^\infty(\frac{1}{2}D)$ を $0 \leq \omega \leq 1$ かつ $\frac{1}{4}D$ 上 $\omega \equiv 1$ となるようにとり，$\tilde{u} := \omega u$ とする．

$\tilde{u}_h$ を補題 1 の仮定を満たすようにとると，$\eta_h \in V_h(\frac{1}{4}D)$ に対し，
$a_D^1(\tilde{u}_h - u_h, \eta_h) = 0$ となる．したがって，補題 1 より，

$$|u(x_0) - u_h(x_0)| \leq C \|\tilde{u}\|_{*,\frac{1}{2}D} + C \|u - u_h\|_{L^2(D)}$$

となり，三角不等式より a^1 の求めたい評価が得られる．

最後に a^1 の評価を用いて定理 1 の結果を得る．

5．弱最大値原理

弱最大値原理

定理 2 (弱離散最大値原理)

$u_h \in V_h$ が離散調和である，つまり

$$a(u_h, \chi) = 0 \quad {}^\forall \chi \in \mathring{V}_h \tag{13}$$

を満たすとする．このとき，仮定 1 のもとで，h および u_h に依存しない正定数 C が存在し，十分小さな h に対し，

$$\|u_h\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C \|u_h\|_{L^\infty(\partial\Omega)} \tag{14}$$

が成り立つ．

弱最大値原理-定理 2 の略証

略証 Step 1.

$x_0 \in \Omega$ を $|u_h(x_0)| = \|u_h\|_{L^\infty(\Omega)}$ となるようにとり，$d = \mathrm{dist}(x, \partial\Omega)$，$\rho = \max\{d, h\}$ とする．定理 1 と逆不等式より，

$$\|u_h\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C\rho^{-1} \|u_h\|_{L^2(S_\rho(x_0))} \tag{15}$$

となる．

$\phi \in C_0^\infty(S_\rho(x_0))$ を $\|\phi\|_{L^2(S_\rho(x_0))} = 1$ となるようにとる．$v \in H_0^1(\Omega)$ を (1) において，$f = \phi$，$g = 0$ とした解とする．

このとき，ある $4/3 < p \leq 2$ に対して，$v \in W^{2,p}(\Omega)$ であり，$w \in V^2$ に対し，$a(v, w) = (\phi, w)_\Omega$ が成り立つ．$v_h \in \mathring{V}_h$ を

$$a(v_h, \chi) = (\phi, \chi)_\Omega \quad {}^\forall \chi \in \mathring{V}_h$$

を満たすようにとる．

弱最大値原理-定理 2 の略証

略証 Step 2.

u_h に対する仮定および，a の性質より，$\Lambda_h := \{x \in \overline{\Omega} \colon \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) \le h\}$ として，

$$|(u_h, \phi)_\Omega| \le C h^{-1} \|u_h\|_{L^\infty(\partial\Omega)} \|v - v_h\|_{V^1(\Lambda_h)} \tag{16}$$

となる．

$d_j = R_0 2^{-j}$ とし，領域を円環 $A_j := \{x \in \overline{\Omega} \colon d_{j+1} \le |x - x_0| \le d_j\}$ に分けて考えると，L^2 誤差評価や Poisson 方程式の性質，$h \le \rho \le C d_j \le R_0$ および $p > \frac{3}{4}$ であることから，

$$\begin{aligned}
\|v - v_h\|_{V^1(\Lambda_h)} &\le C \sum_{j=0}^{J} h^{1/2} d_j^{1/2} \|v - v_h\|_{V^2(\Lambda_h \cap A_j)} \\
&\quad + C \rho^{1/2} h^{1/2} \|v - v_h\|_{V^2(\Lambda_h \cap S_{8\rho}(x_0))} \\
&\le C h \rho
\end{aligned}$$

となる．

6．L^∞ 誤差評価

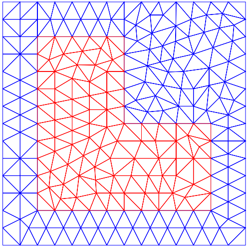
L^∞ 誤差評価

領域および三角形分割の仮定として次を考える．

仮定 2

凸多角形領域 $\widetilde{\Omega} \supset\supset \Omega$ が存在し，$\widetilde{\Omega}$ の三角形分割 $\widetilde{\mathcal{T}}_h$ であって，その Ω への制限が $\mathcal{T}_h$ となり，(3) における定数 C が同じものでとれる．

$\widetilde{\mathcal{E}}_h$，$V^p(\widetilde{\Omega})$，$V_h(\widetilde{\Omega})$ などを $\widetilde{\mathcal{T}}_h$ を用いて定める．



図：Ω(赤) と $\widetilde{\Omega}$(青)

L^∞ 誤差評価

定理 3

$u \in V^\infty$ と $u_h \in V_h$ が

$$a(u - u_h, \chi) = 0 \quad {}^\forall \chi \in V_h$$

を満たすとする．このとき，仮定 1，2 のもとで，h，u，u_h に依存しない正定数 C が存在し，十分小さな h に対し，

$$\|u - u_h\|_{L^\infty(\Omega)} \le C \left(\inf_{\chi \in V_h} \|u - \chi\|_{*,\Omega} + \|u - u_h\|_{L^\infty(\partial\Omega)} \right) \tag{17}$$

が成り立つ．

略証 Step 1．

$\tilde{u} \in V^\infty(\widetilde{\Omega})$ を u の拡張であって，$\|\tilde{u}\|_{V^\infty(\widetilde{\Omega})} \le C \|u\|_{V^\infty(\Omega)}$ かつ $\partial\widetilde{\Omega}$ 上 $\tilde{u} = 0$ となるようにとる．$\tilde{u}_h \in \mathring{V}_h(\widetilde{\Omega})$ を

$$\tilde{a}(\tilde{u} - \tilde{u}_h, \chi) = 0 \quad {}^\forall \chi \in \mathring{V}_h(\widetilde{\Omega})$$

を満たすようにとる．ただし．$\tilde{a}$ は a の定義において，$\mathcal{T}_h$，$\mathcal{E}_h$ をそれぞれ $\widetilde{\mathcal{T}}_h$，$\widetilde{\mathcal{E}}_h$ としたものである．このとき，定理 1 より．

$$\|\tilde{u} - \tilde{u}_h\|_{L^\infty(\Omega)} \le C \|\tilde{u}\|_{*,\widetilde{\Omega}} + C \|\tilde{u} - \tilde{u}_h\|_{L^2(\widetilde{\Omega})} \tag{18}$$

となる．

L^∞ 誤差評価-定理 3 の略証

略証 Step 2.

$\tilde{a}$ の連続性と Poisson 方程式の正則性より，

$$\|\tilde{u} - \tilde{u}_h\|_{L^2(\widetilde{\Omega})} \leq Ch \|\tilde{u}\|_{V^\infty(\widetilde{\Omega})} \tag{19}$$

となる．$\chi \in \mathring{V}_h$ に対し，$a(u_h - \tilde{u}_h, \chi) = 0$ であるから，定理 2，1 および (19) より，

$$\begin{aligned} \|u_h - \tilde{u}_h\|_{L^\infty(\Omega)} &\leq C \|u_h - \tilde{u}_h\|_{L^\infty(\partial\Omega)} \\ &\leq C \|\tilde{u}\|_{*,\widetilde{\Omega}} + C \|u - u_h\|_{L^\infty(\partial\Omega)} \end{aligned} \tag{20}$$

となる．

$\chi \in V_h$ に対し，$u - u_h = (u - \chi) - (u_h - \chi)$ であるから，三角不等式と合わせて (17) が成り立つ．

L^∞ 誤差評価

多項式に対する逆不等式とトレース不等式を用いると次の系が得られる．

系 1

定理 3 の仮定に加え，$u \in W^{1+r,\infty}(\Omega)$ とする．このとき，

$$\|u - u_h\|_{L^\infty(\Omega)} \leq Ch^{r-1}\|u\|_{W^{1+r,\infty}(\Omega)} \tag{21}$$

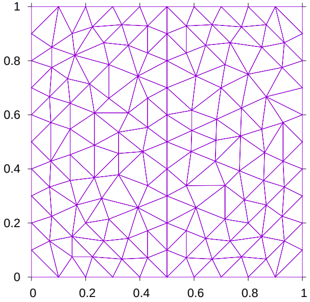
が成り立つ．

[Sch80] における有限要素法の誤差評価は，$r=1$ のとき $O(h^2|\log h|)$，$r \geq 2$ のとき $O(h^{1+r})$ である．
今回の証明では境界における誤差が非自明のため，あまり良い評価になっていない．

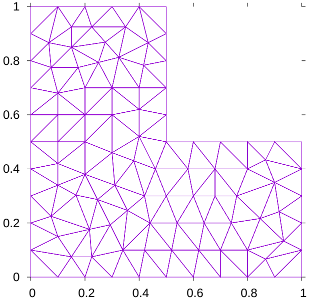
7．数値計算と結論

数値計算

二つの領域において定理 2 と系 1 の数値計算を行った.



図：**正方形領域**



図：**L 字型領域**

定理 2 の数値計算

$f = 0$，$g = \cos(\pi x)\cos(\pi y)$ として DG 法を計算すると，得られた近似解 u_h は (13) を満たす．
u_h の Ω および $\partial\Omega$ 上の最小値と最大値は表のようになった．

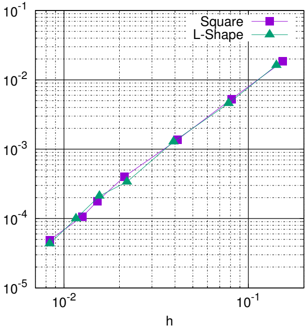
領域形状	h	$\min_{\Omega} u_h$	$\min_{\partial\Omega} u_h$	$\max_{\Omega} u_h$	$\max_{\partial\Omega} u_h$
正方形領域	$0.152\ldots$	$-1.014\ldots$	$-1.014\ldots$	$1.014\ldots$	$1.014\ldots$
	$0.076\ldots$	$-1.004\ldots$	$-1.004\ldots$	$1.004\ldots$	$1.004\ldots$
L 字型領域	$0.152\ldots$	$-1.014\ldots$	$-1.014\ldots$	$1.014\ldots$	$1.014\ldots$
	$0.079\ldots$	$-1.004\ldots$	$-1.004\ldots$	$1.004\ldots$	$1.004\ldots$

表：Ω および $\partial\Omega$ 上の最小値と最大値

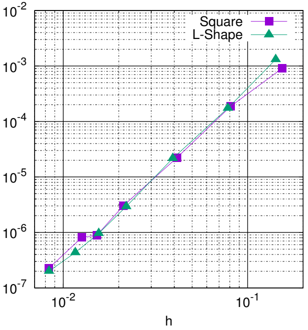
(14) における定数 C は 1 に近い値となり，離散最大値原理が成り立っていると予想される．

系 2 の数値計算

Poisson 方程式の厳密解 $u(x,y) = \sin(\pi x)\sin(\pi y)$ と $r = 1$，2 について DG 法を用いて計算した近似解との L^∞ 誤差を計算した．
誤差のオーダーがおよそ $O(h^{1+r})$ になっていて系 2 で得られた結論よりも良い結果になっている．



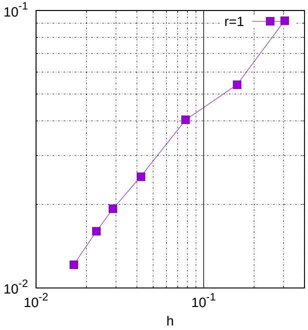
図：$r = 1$ における L^∞ 誤差



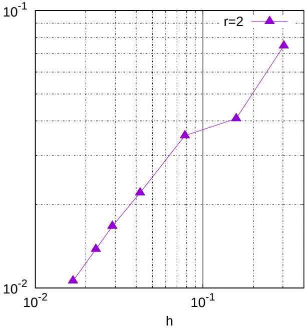
図：$r = 2$ における L^∞ 誤差

系 2 の数値計算

L 字型領域において，凹角の付近で $r^{2/3}$ となる u について同様に誤差評価を行った．
h が減少するにしたがって誤差も減少するが，そのオーダーは $O(h)$ よりも小さい．



図：$r = 1$ における L^∞ 誤差



図：$r = 2$ における L^∞ 誤差

結論

- Poisson 方程式に対する DG 法について，内部誤差評価，弱離散最大値原理および L^∞ 誤差評価が得られた．
- しかし，得られた結果は [CC04] の理論や，数値計算で得られた結果から予想されるものよりも評価が粗いものになってしまっている．
- $\alpha(h)$ および $\|u - u_h\|_{L^\infty(\partial\Omega)}$ の評価をより精密に行い，[Sch80] で示されている有限要素法の誤差評価と同等の結果を得ることが今後の課題である．

参考文献

[ABCM02] D. N. Arnold, F. Brezzi, B. Cockburn, and L. D. Marini.
Unified Analysis of Discontinuous Galerkin Methods for Elliptic Problems.
SIAM Journal on Numerical Analysis, 39(5):1749–1779, 2002.

[AM09] B. Ayuso and L. D. Marini.
Discontinuous galerkin methods for advection-diffusion-reaction problems.
SIAM J. Numer. Anal., 47(2):1391–1420, 2009.

[BS73] H. Brezis and W. A. Strauss.
Semi-linear second-order elliptic equations in L^1 .
J. Math. Soc. Japan, 25(4):565–590, 10 1973.

[CC04] Z. Chen and H. Chen.
Pointwise Error Estimates of Discontinuous Galerkin Methods with Penalty for Second-Order Elliptic Problems.
SIAM Journal on Numerical Analysis, 42(3):1146–1166, 2004.

[Gri76] P. Grisvard.
Behavior of the Solutions of an Elliptic Boundary Value Problem in a Polygonal of Polyhedral Domain.
In *Numerical Solution of Partial Differential Equations-III, SYNSPADE 1975*, pages 207–274. Academic Press, 1976.

[Sch63] M. Schechter.
On L^p Estimates and Regularity, I.
American Journal of Mathematics, 85(1):1–13, 1963.

[Sch80] A. H. Schatz.
A Weak Discrete Maximum Principle and Stability of the Finite Element Method in L_∞ on Plane Polygonal Domains. I.
Mathematics of Computation, 34(149):77–91, 1980.