

N 次元球状領域上の Poisson 方程式に対する不連続 Galerkin 法

千葉悠喜 齊藤宣一

東京大学大学院 数理科学研究科

日本数学会 2017 年度秋季総合分科会

山形大学

平成 29 年 9 月 13 日

目次

1. 導入
2. DG 法のスキーム
3. DG スキームの解析
4. 数値計算

1 . 導入

導入

偏微分方程式論において、空間の次元 N に関係した臨界値に基づく様々な臨界現象が知られている。

例：半線形楕円型方程式の正值解

$N \geq 3$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$: 滑らかな有界領域

$$\begin{cases} \Delta u + |u|^{p-1} u = 0 & (x \in \Omega) \\ u = 0 & (x \in \partial\Omega) \end{cases}$$

について、 $1 < p < p_s = (N + 2)/(N - 2)$ のとき、正值解は存在し、 $p > p_s$ のとき、正值解が存在しない場合がある。

特に高次元の場合に数値計算が可能ならば、実験的な考察を通じて臨界現象の理解と解明に大いに役立つ。

モデル問題

N 次元球状領域 $B_R = \{\xi \in \mathbb{R}^N \mid |\xi|_{\mathbb{R}^N} < R\}$ 上の次の Poisson 方程式を考える。

Poisson 方程式

$$\begin{cases} -\Delta_{\xi}U(\xi) + Q(\xi)U(\xi) = F(\xi) & (\xi \in B_R) \\ U(\xi) = 0 & (\xi \in \partial B_R) \end{cases} \quad (1)$$

$x = |\xi|$ とおき、係数関数 Q と F に球対称性 $Q(\xi) = \hat{q}(x)$ と $F(\xi) = \hat{f}(x)$ を仮定する。

このとき、(1) は次の方程式に帰着される。

$$\begin{cases} -\frac{1}{x^{N-1}} (x^{N-1}\hat{u}_x)_x + \hat{q}\hat{u} = \hat{f} & (x \in I = (0, R)) \\ \hat{u}_x(0) = \hat{u}(R) = 0 \end{cases} \quad (2)$$

重み関数を用いて特異性を取り除き、FEM を適用した数値計算手法が 2 つ提案されている. (cf. K, Ericsson and V, Thomée. 1984)

1. 重み x^{N-1} を用いた手法

$$-(x^{N-1}\hat{u}_x)_x + x^{N-1}\hat{q}\hat{u} = x^{N-1}\hat{f}$$

2. 重み x を用いた手法

$$-(x\hat{u}_x)_x + (2 - N)\hat{u}_x + x\hat{q}\hat{u} = x\hat{f}$$

本研究では、後者の手法に対し、不連続 Galerkin(DG) 法の適用を検討する。

2 . DG 法のスキーム

一般に次の問題を考える.

移流拡散方程式

$$\begin{cases} -(\nu u_x)_x + bu_x + qu = f & (x \in I) \\ u_x(0) = u(R) = 0 \end{cases} \quad (3)$$

$\nu(x) = x$, $b \leq 0$ は定数, $q, f \in L^2(I)$, $q(x) > 0$ ($x \in I$) を仮定する.

区間 I に対し, 分割 $\mathcal{T}_h = \{K_i\}_{i \in \Lambda}$ を次のように導入する.

$$0 = x_1 < x_2 < \cdots < x_i < \cdots < x_n = R$$

$$K_i = (x_i, x_{i+1}), \quad h_i = |K_i| = x_{i+1} - x_i,$$

$$h = \max_{i \in \Lambda} h_i, \quad \Lambda = \{1, 2, \dots, n-1\}$$

$$e_i = \min\{h_i, h_{i-1}\} \quad (i = 2, \dots, n-1), \quad e_n = h_{n-1}$$

関数空間

$$H^m(\mathcal{T}_h) = \{v \in L^2(I) \mid v|_{K_i} \in H^m(K_i) \ (i \in \Lambda)\}$$

$$V_h = V_h^k = \{v \in L^2(I) \mid v|_{K_i} \in \mathcal{P}^k(K_i) \ (i \in \Lambda)\}$$

一般に, $v \in H^1(\mathcal{T}_h)$ に対して, $v^i = v|_{K_i} \ (i \in \Lambda)$ と表す.

さらに, 次の表記を用いる.

$$\nu_i = \nu(x_i) = x_i, \quad (u, v)_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} uv \, dx$$

$$[[v]]_i = \begin{cases} -v^1(x_1) & (i = 1) \\ v^{i-1}(x_i) - v^i(x_i) & (2 \leq i \leq n-1) \\ v^{n-1}(x_n) & (i = n) \end{cases}$$

$$\langle\langle v \rangle\rangle_i = \begin{cases} v^1(x_1) & (i = 1) \\ \frac{v^{i-1}(x_i) + v^i(x_i)}{2} & (2 \leq i \leq n-1) \\ v^{n-1}(x_n) & (i = n) \end{cases}$$

スキーム

$$\begin{aligned} \text{Find } u_h \in V_h \quad \text{s.t.} \\ a_h(u_h, v) = a_h^d(u_h, v) + a_h^{\text{cr}}(u_h, v) = (f, v) \quad (\forall v \in V_h) \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} a_h^d(u, v) &= \sum_{i=1}^{n-1} (\nu u_x, v_x)_i - \sum_{i=2}^n \nu_i \langle\langle u_x \rangle\rangle_i [[v]]_i \\ &\quad - \alpha \sum_{i=2}^n \nu_i \langle\langle v_x \rangle\rangle_i [[u]]_i + \sum_{i=2}^n \frac{\nu_i \sigma}{e_i} [[u]]_i [[v]]_i \\ a_h^{\text{cr}}(u, v) &= - \sum_{i=1}^{n-1} (bu, v_x)_i + \sum_{i=1}^{n-1} b \langle\langle u \rangle\rangle_i [[v]]_i + \sum_{i=2}^{n-1} \frac{1}{2} |b| [[u]]_i [[v]]_i + \sum_{i=1}^{n-1} (qu, v)_i \\ (f, v) &= \sum_{i=1}^{n-1} (f, v)_i \end{aligned}$$

3. DG スキームの解析

次の DG ノルムを導入する.

$$\|v\|_d^2 = \sum_{i=1}^{n-1} (\nu v_x, v_x)_i + \sum_{i=2}^n \frac{\nu_i \sigma}{e_i} \llbracket v \rrbracket_i^2, \quad \|v\|_{d,*}^2 = \|v\|_d^2 + \sum_{i=1}^{n-1} h_i^2 (\nu v_{xx}, v_{xx})_i$$

$$\|v\|_{cr}^2 = \sum_{i=1}^{n-1} (qv, v)_i + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} |b| \llbracket v \rrbracket_i^2, \quad \|v\|_{cr,*}^2 = \|v\|_{cr}^2 + \sum_{i=1}^{n-1} |b| \langle\langle v \rangle\rangle_i^2$$

$$\| \|v\| \|^2 = \|v\|_d^2 + \|v\|_{cr}^2, \quad \| \|v\| \|^2_* = \|v\|_{d,*}^2 + \|v\|_{cr,*}^2$$

区間分割 $\{\mathcal{T}_h\}_h$ について準一様性を仮定する.

$$\exists \theta_0 > 0 \quad \text{s.t.} \quad 0 < \frac{h_i}{h_j} \leq \theta_0 \quad (1 \leq \forall i, j \leq n, \forall \mathcal{T}_h \in \{\mathcal{T}_h\}_h) \quad (\text{A1})$$

重み付き不等式

補題 1 (トレース不等式)

次を満たす正定数 $C_1 = C_1(\theta_0)$ が存在する.

$$\nu_i(v_x^i(x_i))^2 \leq C_1(h_i^{-1}(\nu v_x, v_x)_i + h_i(\nu v_{xx}, v_{xx})_i)$$

$$\nu_i(v_x^i(x_{i+1}))^2 \leq C_1(h_i^{-1}(\nu v_x, v_x)_i + h_i(\nu v_{xx}, v_{xx})_i)$$

補題 2 (逆不等式)

$K = (s, t) \subset \mathbb{R}_{>0}$ を区間とし, $\rho = t - s > 0$ とする. このとき, 次を満たす正定数 $C_2 = C_2(k)$ が存在する.

$$\int_K x v_{xx}^2 dx \leq C_2 \rho^{-2} \int_K x v_x^2 dx \quad (v \in \mathcal{P}^k) \quad (5)$$

補題 3 (a_h^d の連続性と安定性)

(i) 任意の $\alpha \in \mathbb{R}$ と $\sigma > 0$ に対して,

$$a_h^d(u, v) \leq C_d \|u\|_{d,*} \|v\|_d \quad (u \in H^2(\mathcal{T}_h), v \in V_h)$$

を満たす定数 $C_d = C_d(\alpha, \sigma, \theta_0) > 0$ が存在する.

(ii) 次を満たす定数 $\sigma_* = \sigma_*(\alpha, \theta_0) > 0$ が存在する. $\sigma \geq \sigma_*$ ならば,

$$a_h^d(v, v) \geq \frac{1}{2} \|v\|_d^2 \quad (v \in V_h)$$

が成り立つ.

拡散項 a_h^d の解析

略証

(i) Cauchy-Schwarz の不等式より,

$$|a_h^d(u, v)| \leq \left(\sum_{i=1}^{n-1} (\nu u_x, u_x)_i^2 + \sum_{i=2}^n \frac{\nu_i e_i}{\sigma} \langle\langle u_x \rangle\rangle_i^2 + (1 + |\alpha|) \sum_{i=2}^n \frac{\nu_i \sigma}{e_i} [u]_i^2 \right)^{1/2} \\ \cdot \left(\sum_{i=1}^{n-1} (\nu v_x, v_x)_i^2 + \sum_{i=2}^n \frac{\nu_i e_i}{\sigma} \langle\langle v_x \rangle\rangle_i^2 + (1 + |\alpha|) \sum_{i=2}^n \frac{\nu_i \sigma}{e_i} [v]_i^2 \right)^{1/2}$$

となる。トレース不等式および逆不等式を適用することで求めたい評価が得られる。

拡散項 a_h^d の解析

略証

(ii) Cauchy-Schwarz の不等式, トレース不等式および逆不等式より, $\delta > 0$ に対し,

$$\begin{aligned} a_h^d(v, v) &\geq \left(1 - \frac{1 + |\alpha|}{2\delta\sigma} C_1(1 + C_2)\right) \sum_{i=1}^{n-1} (\nu v_x, v_x)_i \\ &\quad + \left(1 - \frac{1 + |\alpha|}{2}\delta\right) \sum_{i=2}^n \frac{\nu_i\sigma}{e_i} \llbracket v \rrbracket_i^2 \end{aligned}$$

となる. $\delta = 1/(1 + |\alpha|)$, $\sigma \geq \sigma_* = C_1(1 + C_2)(1 + |\alpha|)/\delta$ とすれば求めたい評価が得られる.

移流項 a_h^{cr} の解析

各 $i \in \Lambda$ に対し, $P_{K_i} : L^1(K_i) \rightarrow \mathcal{P}^k(K_i)$ を局所的な L^2 射影作用素とする.

大域的な L^2 射影作用素 $P_h : L^1(I) \rightarrow V_h$ を, $(P_h v)|_{K_i} = P_{K_i} v$ ($i \in \Lambda$) で定義する.

補題 4 (a_h^{cr} の連続性と強圧性)

(i) 次を満たす定数 $C_{\text{cr}} > 0$ が存在する.

$$a_h^{\text{cr}}(u - P_h u, v) \leq C_{\text{cr}} \|u - P_h u\|_{\text{cr},*} \|v\|_{\text{cr}} \quad (u \in H^2(\mathcal{T}_h), v \in V_h)$$

(ii) 次が成り立つ.

$$a_h^{\text{cr}}(v, v) \geq \frac{1}{2} \|v\|_{\text{cr}}^2 \quad (v \in V_h)$$

略証

(i) $\phi = u - P_h u$ とする. $v_x \in \mathcal{P}^{k-1}$ であるから $(\phi, v_x)_i = 0$ に注意すると, Cauchy-Schwarz の不等式より,

$$\begin{aligned} a_h^{\text{cr}}(\phi, v) &\leq \left(\sum_{i=1}^{n-1} |b| \langle\langle \phi \rangle\rangle_i^2 + \sum_{i=2}^{n-1} \frac{1}{2} |b| [\phi]_i^2 + \sum_{i=1}^{n-1} (q\phi, \phi)_i \right)^{1/2} \\ &\quad \cdot \left(\sum_{i=1}^{n-1} |b| [v]_i^2 + \sum_{i=2}^{n-1} \frac{1}{2} |b| [v]_i^2 + \sum_{i=1}^{n-1} (qv, v)_i \right)^{1/2} \\ &\leq 3 \|\phi\|_{\text{cr},*} \|v\|_{\text{cr}} \end{aligned}$$

となる.

補題 5 (a_h の連続性と強圧性)

(i) 任意の $\alpha \in \mathbb{R}$ と $\sigma > 0$ に対して,

$$a_h(u - P_h u, v) \leq C_{\text{dcr}} \| \|u - P_h u\|_* \|v\| \quad (u \in H^2(\mathcal{T}_h), v \in V_h)$$

を満たす定数 $C_{\text{dcr}} = C_{\text{dcr}}(\alpha, \sigma, \theta_0) > 0$ が存在する.

(ii) 次を満たす定数 $\sigma_* = \sigma_*(\alpha, \theta_0) > 0$ が存在する. $\sigma \geq \sigma_*$ ならば,

$$a_h(v, v) \geq \frac{1}{2} \| \|v\| \|^2 \quad (v \in V_h)$$

が成り立つ.

定理 1

$u \in H^2(I)$ が (3) の解であるとする. $\sigma \geq \sigma_*$ とする.

このとき, DG スキーム (4) には一意な解 $u_h \in V_h$ が存在し, Galerkin 直交性

$$a_h(u - u_h, v) = 0 \quad (v \in V_h)$$

が成り立つ. さらに, 次の評価が成り立つ.

$$\| \| u - u_h \| \| \leq (1 + 2C_{\text{dcr}}) \| \| u - P_h u \| \|_* \quad (6)$$

u が十分滑らかなとき, 誤差のオーダーは $O(h^k)$ となる.

4 . 数值計算

数値計算

$I = (0, 1)$, 元の空間の次元 $N = 3, 100$, $b = 2 - N$, $\alpha = 1$, $\sigma = 20$ とし,
 \mathcal{P}^k 要素を用いて $\| \cdot \|$ の誤差について数値計算を行った.

(i) $u(x) = \cos \frac{\pi}{2}x$

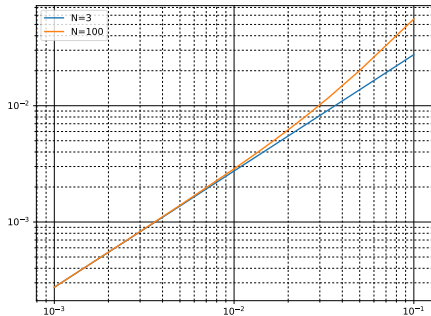


図: \mathcal{P}^1 要素における $\| \cdot \|$ 誤差

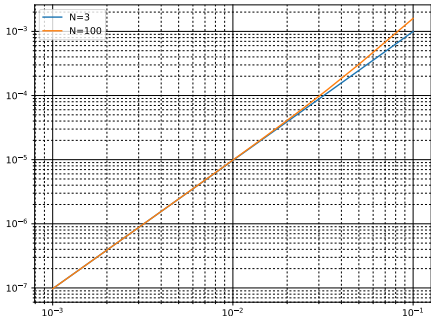


図: \mathcal{P}^2 要素における $\| \cdot \|$ 誤差

h が十分小さいときに $O(h^k)$ となっている.

数値計算

$I = (0, 1)$, 元の空間の次元 $N = 3, 100$, $b = 2 - N$, $\alpha = 1$, $\sigma = 20$ とし,
 \mathcal{P}^k 要素を用いて $\| \cdot \|$ の誤差について数値計算を行った.

(ii) $u(x) = x^{1.75} - 1$

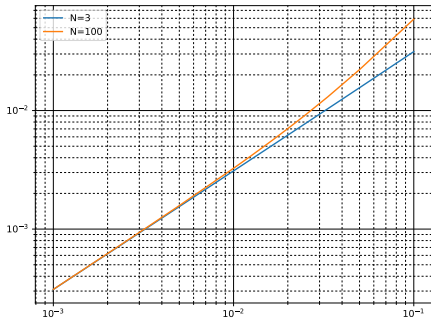


図: \mathcal{P}^1 要素における $\| \cdot \|$ 誤差

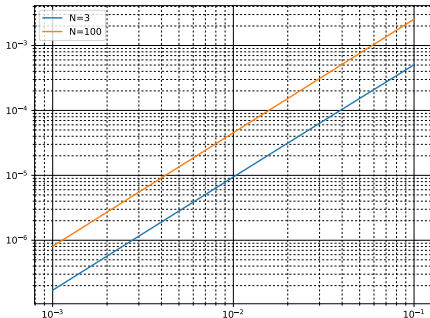


図: \mathcal{P}^2 要素における $\| \cdot \|$ 誤差

$k = 1$ のとき $O(h)$, $k = 2$ のとき $O(h^{1.75})$ となっている.

数値計算 (参考)

$I = (0, 1)$, 元の空間の次元 $N = 3, 100$, $b = 2 - N$, $\alpha = 1$, $\sigma = 20$ とし,
 \mathcal{P}^1 要素を用いていくつかのノルムの誤差について数値計算を行った.

(i) $u(x) = \cos \frac{\pi}{2}x$

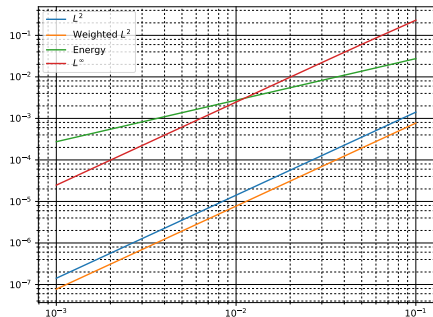


図: $N = 3$ における誤差

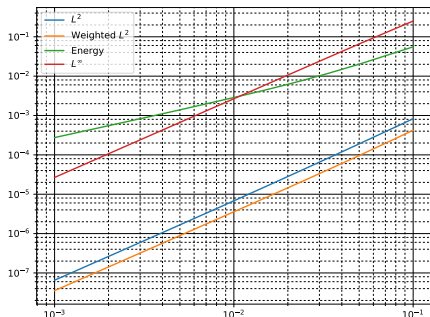


図: $N = 100$ における誤差

||| · ||| は $O(h)$, 他のノルムは $O(h^2)$ となっている.

数値計算 (参考)

$I = (0, 1)$, 元の空間の次元 $N = 3, 100$, $b = 2 - N$, $\alpha = 1$, $\sigma = 20$ とし,
 \mathcal{P}^1 要素を用いていくつかのノルムの誤差について数値計算を行った。

(ii) $u(x) = x^{1.75} - 1$

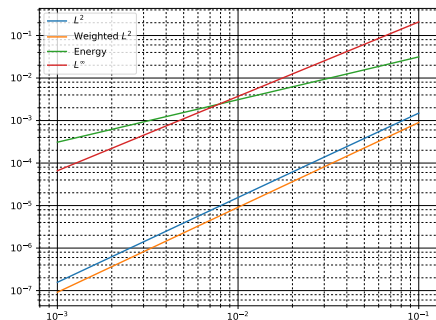


図: $N = 3$ における誤差

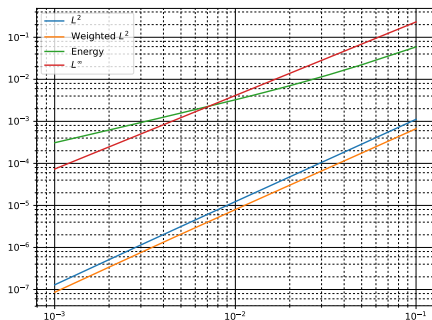


図: $N = 100$ における誤差

L^2 ノルム, 重み付き L^2 ノルムは $O(h^2)$, $\|\cdot\|$ ノルムは $O(h)$, L^∞ ノルムは $O(h^{1.75})$ となっている。

数値計算 (参考)

$I = (0, 1)$, 元の空間の次元 $N = 3, 100$, $b = 2 - N$, $\alpha = 1$, $\sigma = 20$ とし,
 P^1 要素を用いていくつかのノルムの誤差について数値計算を行った。

(iii) $u(x) = x^{1.25} - 1$

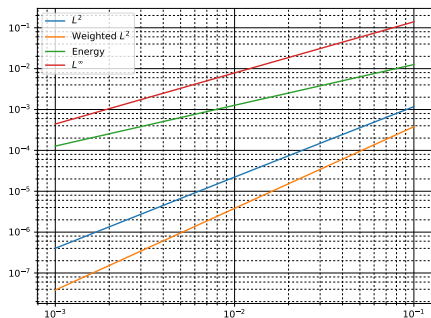


図: $N = 3$ における誤差

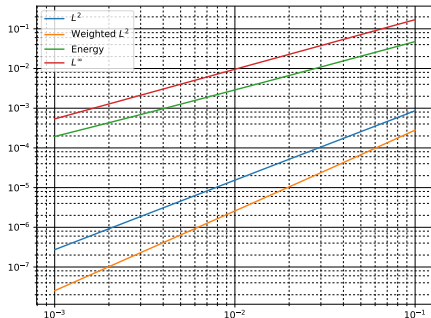


図: $N = 100$ における誤差

L^2 ノルムは $O(h^{1.75})$, 重み付き L^2 ノルムは $O(h^2)$, $\|\cdot\|$ ノルムは $O(h)$,
 L^∞ ノルムは $O(h^{1.25})$ となっている。

数値計算 (参考)

$I = (0, 1)$, 元の空間の次元 $N = 3, 100$, $b = 2 - N$, $\alpha = 1$, $\sigma = 20$ とし,
 P^1 要素を用いていくつかのノルムの誤差について数値計算を行った.

(iv) $u(x) = x^{0.75} - 1$

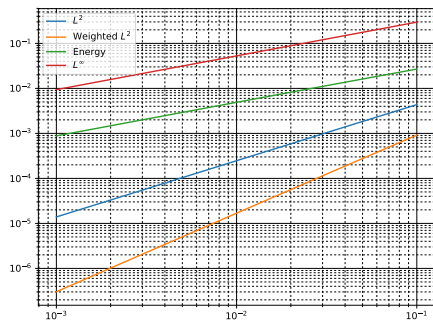


図: $N = 3$ における誤差

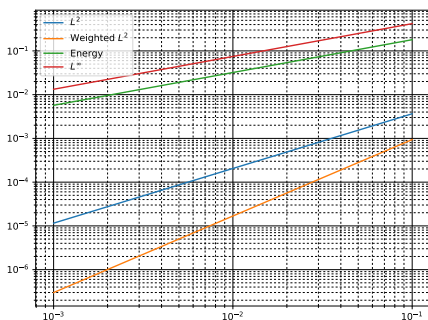


図: $N = 100$ における誤差

L^2 ノルムは $O(h^{1.25})$, 重み付き L^2 ノルムは $O(h^{1.75})$, $\|\cdot\|$ ノルム, L^∞ ノルムは $O(h^{0.75})$ となっている.

- 球対称 Poisson 方程式から誘導される 1 次元移流拡散方程式の DG 法について，エネルギーノルムによる誤差を，射影の近似度合で評価することができた。
- 非線形問題への適用のため， L^∞ ノルムといった他のノルムによる誤差評価を行うことが今後の課題である。