

球対称 Poisson 方程式に対する不連続 Galerkin 法の各点 評価

○ 千葉悠喜 齊藤宣一

東京大学大学院数理科学研究科

2017 年度応用数学合同研究集会

龍谷大学

平成 29 年 12 月 14 日

目次

1. 導入
2. DG 法のスキーム
3. DG スキームの解析
4. 数値計算

1 . 導入

偏微分方程式論において、空間の次元 N に関係した臨界値に基づく様々な臨界現象が知られている。

例：半線形楕円型方程式の正值解

$N \geq 3$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$: 滑らかな有界領域

$$\begin{cases} \Delta u + |u|^{p-1} u = 0 & (x \in \Omega) \\ u = 0 & (x \in \partial\Omega) \end{cases}$$

について、 $1 < p < p_s = (N + 2)/(N - 2)$ のとき、正值解は存在し、 $p > p_s$ のとき、正值解が存在しない場合がある。

特に高次元の場合に数値計算が可能ならば、実験的な考察を通じて臨界現象の理解と解明に大いに役立つ。

モデル問題

N 次元球状領域 $B = \{\xi \in \mathbb{R}^N \mid |\xi|_{\mathbb{R}^N} < 1\}$ 上の次の Poisson 方程式を考える。

Poisson 方程式

$$\begin{cases} -\Delta_{\xi}U(\xi) + Q(\xi)U(\xi) = F(\xi) & (\xi \in B) \\ U(\xi) = 0 & (\xi \in \partial B) \end{cases} \quad (1)$$

$x = |\xi|$ とおき、係数関数 Q と F に球対称性 $Q(\xi) = \hat{q}(x)$ と $F(\xi) = \hat{f}(x)$ を仮定する。

このとき、(1) は次の方程式に帰着される。

$$\begin{cases} -\frac{1}{x^{N-1}} (x^{N-1}\hat{u}_x)_x + \hat{q}\hat{u} = \hat{f} & (x \in I = (0, 1)) \\ \hat{u}_x(0) = \hat{u}(1) = 0 \end{cases} \quad (2)$$

モデル問題

重み関数を用いて特異性を取り除き、FEM を適用した数値計算手法が 2 つ提案されている. (cf. K, Ericsson and V, Thomée. 1984)

1. 重み x^{N-1} を用いた手法

$$-(x^{N-1}\hat{u}_x)_x + x^{N-1}\hat{q}\hat{u} = x^{N-1}\hat{f}$$

2. 重み x を用いた手法

$$-(x\hat{u}_x)_x + (2 - N)\hat{u}_x + x\hat{q}\hat{u} = x\hat{f}$$

後者の手法に対し不連続 Galerkin(DG) 法を適用し、各点評価の考察を行う。

2. DG 法のスキーム

次の問題を考える。

移流拡散方程式

$$\begin{cases} -(xu_x)_x + bu_x + xqu = xf & (x \in I) \\ u_x(0) = u(1) = 0 \end{cases} \quad (3)$$

$b \leq 0$ は定数, $q \in L^\infty(I)$, $q(x) \geq 0$ ($x \in I$) を仮定する。

区間 I に対し, 分割 $\mathcal{T}_h = \{K_i\}_{i \in \Lambda}$ を次のように導入する。

$$0 = x_1 < x_2 < \cdots < x_i < \cdots < x_n = 1$$

$$K_i = (x_i, x_{i+1}), \quad h_i = |K_i| = x_{i+1} - x_i,$$

$$h = \max_{i \in \Lambda} h_i, \quad \Lambda = \{1, 2, \dots, n-1\}$$

$$e_i = \min\{h_i, h_{i-1}\} \quad (i = 2, \dots, n-1), \quad e_n = h_{n-1}$$

関数空間

$$W^{m,p}(\mathcal{T}_h) = \{v \in L^p(I) \mid v|_{K_i} \in W^{m,p}(K_i) \ (i \in \Lambda)\},$$

$$H^m(\mathcal{T}_h) = W^{m,p}(\mathcal{T}_h), \quad V_h = V_h^k = \{v \in L^2(I) \mid v|_{K_i} \in \mathcal{P}^k(K_i) \ (i \in \Lambda)\}$$

一般に, $v \in H^1(\mathcal{T}_h)$ に対して, $v^i = v|_{K_i} \ (i \in \Lambda)$ と表す.

$$(u, v)_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} uv \, dx$$

$$[[v]]_i = \begin{cases} -v^1(x_1) & (i = 1) \\ v^{i-1}(x_i) - v^i(x_i) & (2 \leq i \leq n-1) \\ v^{n-1}(x_n) & (i = n) \end{cases}$$

$$\langle\langle v \rangle\rangle_i = \begin{cases} v^1(x_1) & (i = 1) \\ \frac{v^{i-1}(x_i) + v^i(x_i)}{2} & (2 \leq i \leq n-1) \\ v^{n-1}(x_n) & (i = n) \end{cases}$$

スキーム

$$\begin{aligned} \text{Find } u_h \in V_h \quad \text{s.t.} \\ a_h(u_h, v) = (xf, v) \quad (\forall v \in V_h) \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} a_h(u, v) = & \sum_{i=1}^{n-1} (xu_x, v_x)_i - \sum_{i=2}^n x_i \langle\langle u_x \rangle\rangle_i [v]_i + \sum_{i=2}^n \frac{x_i \sigma}{e_i} [u]_i [v]_i \\ & + \sum_{i=1}^{n-1} (bu, v_x)_i - \sum_{i=2}^n b [u]_i \langle\langle v \rangle\rangle_i + \sum_{i=2}^{n-1} \frac{1}{2} |b| [u]_i [v]_i + \sum_{i=1}^{n-1} (xqu, v)_i \end{aligned}$$

σ : 処罰パラメータ

3. DGスキームの解析

次の DG ノルムを導入する.

$$\|v\|_{\text{DG},2,q}^2 = \sum_{i=1}^{n-1} (xv_x, v_x)_i + \sum_{i=2}^n \frac{x_i \sigma}{e_i} \llbracket v \rrbracket_i^2 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} |b| \llbracket v \rrbracket_i^2 + \sum_{i=1}^{n-1} (qv, v)_i,$$

$$\|v\|_{\text{DG},\infty,q} = \max_{i \in \Lambda} \|v_x\|_{L^\infty(K_i)} + \max_{i=2,\dots,n} e_i^{-1} |\llbracket v \rrbracket_i| \\ + \max_{i=2,\dots,n} |\langle\langle v_x \rangle\rangle_i| + \max_{i \in \Lambda} \|qv\|_{L^\infty(K_i)},$$

$$\|v\|_{\text{DG},1} = \sum_{i=1}^{n-1} \|xv_x\|_{L^1(K_i)} + \sum_{i=1}^{n-1} \|v\|_{L^1(K_i)} \\ + \sum_{i=1}^{n-1} h_i |v^i(x_{i+1})| + \sum_{i=2}^n x_i |\llbracket v \rrbracket_i|$$

区間分割 $\{\mathcal{T}_h\}_h$ について準一様性を仮定する.

$$\exists \theta_0 > 0 \quad \text{s.t.} \quad 0 < \frac{h_i}{h_j} \leq \theta_0 \quad (1 \leq \forall i, j \leq n, \forall \mathcal{T}_h \in \{\mathcal{T}_h\}_h) \quad (\text{A1})$$

補題 1 (a_h の適合性)

$u \in H^2(I)$ が (3) の解であるとする。このとき、

$$a_h(u, v) = (xf, v) \quad (v \in H^2(\mathcal{T}_h))$$

が成り立つ。さらに、 $u_h \in V_h$ が (4) の解ならば、Galerkin 直交性

$$a_h(u - u_h, v_h) = 0 \quad (v_h \in V_h) \tag{5}$$

が成り立つ。

補題 2 (連続性, 強圧性)

(i)

$$a_h(u, v) \leq C \|u\|_{\text{DG}, \infty, q} \|v\|_{\text{DG}, 1} \quad (u \in H^2(\mathcal{T}_h), v \in W^{2,1}(\mathcal{T}_h))$$

を満たす h に依存しない定数 $C > 0$ が存在する.

(ii) 次を満たす定数 $\sigma_* = \sigma_*(\theta_0) > 0$ が存在する: $\sigma \geq \sigma_*$ ならば,

$$a_h(v_h, v_h) \geq \frac{1}{2} \|v_h\|_{\text{DG}, 2, q}^2 \quad (v \in V_h)$$

が成り立つ.

補題 3

DG 法 (4) の解 $u_h \in V_h$ は一意に存在する.

略証

$$\begin{aligned} \sum_{i=2}^{n-1} (b(v_h)_x, v_h)_i &= -\frac{b}{2} v_h^1(x_1)^2 + \frac{b}{2} v_h^{n-1}(x_n)^2 + \frac{b}{2} \sum_{i=2}^{n-1} (v_h^{i-1}(x_i)^2 - v_h^i(x_i)) \\ &= \frac{|b|}{2} v_h^1(x_1)^2 + \frac{|b|}{2} v_h^{n-1}(x_n)^2 + b \sum_{i=2}^n \llbracket v_h \rrbracket \langle\langle v_h \rangle\rangle \end{aligned}$$

よって、 $\delta > 0$ に対し次のようになる。

$$\begin{aligned} a_h(v_h, v_h) &\geq \left(1 - \frac{1}{2\delta\sigma} C\right) \sum_{i=1}^{n-1} (x(v_h)_x, (v_h)_x)_i + \left(1 - \frac{1}{2}\delta\right) \sum_{i=2}^n \frac{x_i\sigma}{e_i} \llbracket v_h \rrbracket_i^2 \\ &\quad + \sum_{i=1}^{n-1} (qxv_h, v_h)_i + \sum_{i=1}^n \frac{|b|}{2} \llbracket v_h \rrbracket_i^2 \end{aligned}$$

補題 4

$u \in W^{1,\infty}(\mathcal{T}_h)$, $u_h \in V_h$ に対し,

$$\|u - u_h\|_{L^\infty(I)} \leq h \max_{i \in \Lambda} \|(u - u_h)_x\|_{L^\infty(K_i)} + \max_{i \in \Lambda} |(u - u_h)^i(x_{i+1})|$$

が成り立つ.

略証

$x \in \overline{K_i}$ に対し,

$$\begin{aligned} |(u - u_h)(x)| &\leq \int_x^{x_{i+1}} |(u - u_h)_x(s)| ds + |(u - u_h)^i(x_{i+1})| \\ &\leq h \|(u - u_h)_x\|_{L^\infty(K_i)} + |(u - u_h)^i(x_{i+1})| \end{aligned}$$

$H^2(\mathcal{T}_h)$ から V_h への射影 P_h を, $v \in H^2(\mathcal{T}_h)$ に対し, 次を満たすように定める.

$$a_h(v - P_h v, \chi) = 0 \quad (\chi \in V_h)$$

この射影について, 次が成り立つ.

補題 5

h に依存しない定数 $C > 0$ が存在し, 十分小さな h に対し,

$$\|P_h v\|_{\text{DG}, \infty, 0} \leq C \|v\|_{\text{DG}, \infty, 0} + C \|q\|_{L^\infty(I)} \max_{i \in \Lambda} |(v - P_h v)^i(x_{i+1})|$$

$(v \in H^2(\mathcal{T}_h))$

が成り立つ. 特に, $q = 0$ ならば, 射影 P_h は $\|\cdot\|_{\text{DG}, \infty, 0}$ について連続となる.

略証

$a_0(u, v) = a_h(u, v) - (xqu, v)$ とする. 次の条件 (i)-(iv) を満たす V_h の基底の組 $\{\phi_{j,l}\}_{j \in \Lambda, l=0, \dots, k}$, $\{\psi_{j,l}\}_{j \in \Lambda, l=0, \dots, k}$ を構成する.

- (i) $\max_{j \in \Lambda, l=0, \dots, k} \|\phi_{j,l}\|_{\text{DG}, \infty, 0} \leq C$
- (ii) $a_0(\phi_{i,m}, \psi_{j,l}) = 0 \quad (i \neq j)$
- (iii) 行列 $A_j = (a_0(\phi_{j,m}, \psi_{j,l}))_{ml}$ は正則かつ, $\|A_j^{-1}\|_{l^\infty} \leq C(x_{j+1}h_j)^{-1}$
- (iv) $\max_{l=0, \dots, k} \|\psi_{j,l}\|_{\text{DG}, 1} \leq C(x_{j+1}h_j)$

略証-各点評価

$$P_h v = \sum_{j \in \Lambda, l=0, \dots, k} v_{j,l} \phi_{j,l} \text{ とすると次のようになる.}$$

$$\begin{aligned} \|P_h v\|_{\text{DG}, \infty, 0} &\leq C \max |v_{i,l}| \\ &\leq C \max_j \|A_j^{-1}\|_{l^\infty} \max_l (|a_0(v, \psi_{j,l})| + |(xq(v - P_h v), \psi_{j,l})|) \\ &\leq C(\|v\|_{\text{DG}, \infty, 0} + \|q\|_{L^\infty} \|v - P_h v\|_{L^\infty}) \end{aligned}$$

第 2 項に補題 4 を適用すると,

$$\begin{aligned} \|P_h v\|_{\text{DG}, \infty, 0} &\leq C(\|v\|_{\text{DG}, \infty, 0} + h \|P_h v\|_{\text{DG}, \infty, 0} \\ &\quad + \|q\|_{L^\infty} \max_{i \in \Lambda} |(v - P_h v)^i(x_{i+1})|) \end{aligned}$$

となり, h を十分小さくすれば求めたい評価が得られる.

略証- $\{\phi_{j,l}\}_{j \in \Lambda, l=0, \dots, k}$ の構成

$$\phi_{j,0} = \begin{cases} -h_j & (x < x_{j+1}) \\ 0 & (x_{j+1} < x) \end{cases}$$

$$\phi_{j,1} = \begin{cases} -h_j + \frac{x_j}{2} \left(\frac{x_j \sigma}{e_j} + |b| \right)^{-1} & (x < x_j) \\ (x - x_j) - h_j & (x_j < x < x_{j+1}) \\ 0 & (x_{j+1} < x) \end{cases}$$

$$\phi_{j,l} = \begin{cases} -h_j & (x < x_j) \\ h_j \left(\frac{x-x_j}{h_j} \right)^l - h_j & (x_j < x < x_{j+1}) \\ 0 & (x_{j+1} < x) \end{cases} \quad (l = 2, \dots, k)$$

このとき、 $i > j$ に対し、 $a_0(\phi_{i,m}, \phi_{j,l}) = 0$ が成り立つ。

略証- $\{\psi_{j,l}\}_{j \in \Lambda, l=0, \dots, k}$ の構成

$$\psi_{j,l} = \phi_{j,l} + \sum_{0 \leq p < j, 0 \leq q \leq k} b_{pq}^{jl} \phi_{p,q} \text{ とする.}$$

このとき, $i > j$ に対し, $a_0(\phi_{i,m}, \psi_{j,l}) = 0$ が成り立つ.

また, $a_0(\phi_{j,m}, \psi_{j,l}) = a_0(\phi_{j,m}, \phi_{j,m})$ であるから, 補題 2 より, A_j は正則である.

$$\eta \in \mathbb{R}^{k+1}, y = \sum_{l=0}^k \eta_l \phi_{j,l} \text{ とすると,}$$

$$\eta^T A_j \eta = a_0(y, y) \geq \frac{1}{2} \|y\|_{\text{DG}, 2, 0}^2 \geq C(x_{j+1} h_j) |\eta|$$

となり, $\|A_j^{-1}\|_{l^\infty} \leq C(x_{j+1} h_j)^{-1}$ となる.

略証- $\{\psi_{j,l}\}_{j \in \Lambda, l=0, \dots, k}$ の構成

$i < j$ に対し, (ii) を整理すると,

$$\sum_{q=0}^k b_{iq}^{jl} a_0(\phi_{i,m}, \phi_{i,q}) = a_0(\phi_{i,m}, \phi_{j,l} - \sum_{i < p < j, 0 \leq q \leq k} b_{pq}^{jl} \phi_{p,q})$$
$$1 \leq i < j \leq n-1, m, l = 0, \dots, k$$

となり, $i = j-1, j-2, \dots, 1$ と逐次的に解くことができる.

\Rightarrow 条件の (i)-(iii) が成り立つ.

略証-(iv) の証明

$\phi = \phi_{j,l}$, $\psi = \psi_{j,l}$ とする. $j \geq 2$ のとき,

$$\begin{aligned} \|\psi\|_{\text{DG},1} &\leq \|x\phi_x\|_{L^1(K_j)} + \|\phi\|_{L^1(K_j)} + |b| h_j |\phi^j(x_{j+1})| + x_{j+1} |[\phi]_{j+1}| \\ &\quad + \sum_{i=1}^{j-1} (\|x\psi_x\|_{L^1(K_i)} + \|\psi\|_{L^1(K_i)} + |b| h_i |\psi^i(x_{i+1})| + x_{i+1} |[\psi]_{i+1}|) \end{aligned}$$

となる. (1 行目) $\leq Cx_{j+1}h_j$ である. 2 行目を J とする. Hölder の不等式より,

$$J \leq Cx_{j+1} \left[\sum_{i=1}^{j-1} \left\| x^{\frac{1}{2}} \psi_x \right\|_{L^2(K_i)}^2 + \sum_{i=2}^j \frac{x_i \sigma}{e_i} [\psi]_i^2 + \sum_{i=1}^j \frac{b}{2} [\psi]_i^2 \right]^{1/2} + Cx_{j+1}h_j$$

となる. [] 内は Ericsson, Thomée と同様の方法で評価でき, (iv) が示される.

定理 1

$u \in H^2(I)$, $u_h \in V_h$ をそれぞれ (3), (4) の解とする. このとき, h に依存しない定数 $C > 0$ が存在し, 十分小さな h に対し,

$$\|u - u_h\|_{L^\infty(I)} \leq C \left(h \inf_{\chi \in V_h} \|u - \chi\|_{\text{DG}, \infty, 0} + \max_{i \in \Lambda} |(u - u_h)^i(x_{i+1})| \right)$$

$$\max_{i \in \Lambda} \|(u - u_h)_x\|_{L^\infty(K_i)} \leq C \left(\inf_{\chi \in V_h} \|u - \chi\|_{\text{DG}, \infty, 0} + \max_{i \in \Lambda} |(u - u_h)^i(x_{i+1})| \right)$$

が成り立つ. さらに, $q = 0$ ならば,

$$\max_{i \in \Lambda} \|(u - u_h)_x\|_{L^\infty(K_i)} \leq C \inf_{\chi \in V_h} \|u - \chi\|_{\text{DG}, \infty, 0}$$

が成り立つ.

略証

$\chi \in V_h$ に対し, $u - u_h = (u - \chi) - P_h(u - \chi)$ である. 補題 4, 5 より,

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|_{L^\infty(I)} &\leq h \|u - u_h\|_{\text{DG}, \infty, 0} + \max_{i \in \Lambda} |(u - u_h)^i(x_{i+1})| \\ &\leq C(h \|u - \chi\|_{\text{DG}, \infty, 0} + h \|P_h(u - \chi)\|_{\text{DG}, \infty, 0}) \\ &\quad + \max_{i \in \Lambda} |(u - \chi)^i(x_{i+1})| \\ &\leq Ch \|u - \chi\|_{\text{DG}, \infty, 0} + C \max_{i \in \Lambda} |(u - \chi)^i(x_{i+1})| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \max_{i \in \Lambda} \|(u - u_h)_x\|_{L^\infty(K_i)} &\leq \|u - \chi\|_{\text{DG}, \infty, 0} + \|P_h(u - \chi)\|_{\text{DG}, \infty, 0} \\ &\leq C(\|u - \chi\|_{\text{DG}, \infty, 0} + \|q\|_{L^\infty} \max_{i \in \Lambda} |(u - \chi)^i(x_{i+1})|) \end{aligned}$$

となる.

4 . 数值計算

数値計算

$I = (0, 1)$, 元の空間の次元 $N = 100$, $b = 2 - N$, $q = 1 + x$, $\sigma = 20$ とし,
 \mathcal{P}^k 要素を用いて近似解と厳密解の誤差について数値計算を行った.

(i) $u(x) = \cos \frac{\pi}{2}x$

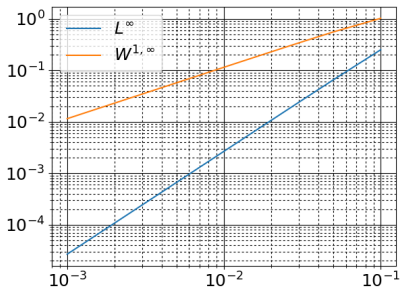


図: \mathcal{P}^1 要素における誤差

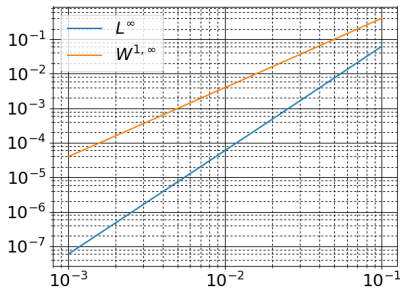


図: \mathcal{P}^2 要素における誤差

L^∞ ノルムが $O(h^{k+1})$, $W^{1,\infty}$ セミノルムが $O(h^k)$ となっている.

数値計算

$I = (0, 1)$, 元の空間の次元 $N = 100$, $b = 2 - N$, $q = 1$, $\sigma = 20$ とし, \mathcal{P}^k 要素を用いて近似解と厳密解の誤差について数値計算を行った.

(ii) $u(x) = x^{1.75} - 1$

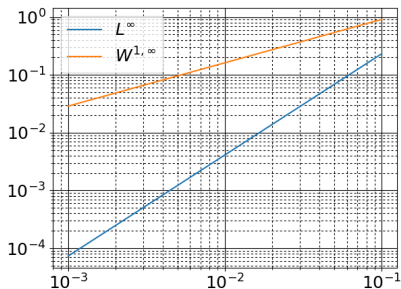


図: \mathcal{P}^1 要素における誤差

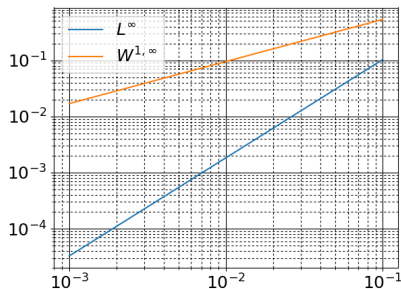


図: \mathcal{P}^2 要素における誤差

L^∞ ノルムが $O(h^{1.75})$, $W^{1,\infty}$ セミノルムが $O(h^{0.75})$ となっている.

数値計算 (参考)

$I = (0, 1)$, 元の空間の次元 $N = 100$, $b = 2 - N$, $q = 1$, $\sigma = 20$ とし, \mathcal{P}^k 要素を用いて近似解と厳密解の誤差について数値計算を行った.

(iii) $u(x) = x^{0.75} - 1$

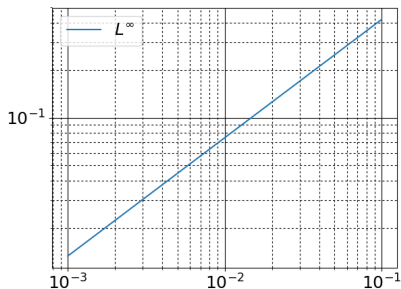


図: \mathcal{P}^1 要素における誤差

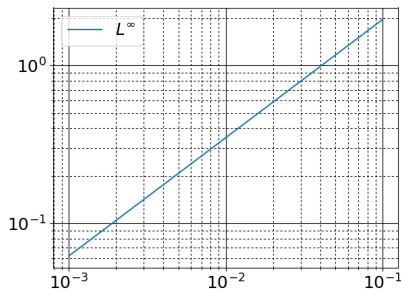


図: \mathcal{P}^2 要素における誤差

L^∞ ノルムが $O(h^{0.75})$ となっている.

- 球対称 Poisson 方程式から誘導される 1 次元移流拡散方程式の DG 法について、 L^∞ ノルム、 $W^{1,\infty}$ セミノルムによる誤差を、有限要素空間の近似度合と各小区間の右端点における差を用いて評価することができた。
- これらをもとに、非線形問題に対する DG 法のスキームの提案とその解析を行うことが今後の課題である。