

滑らかな領域上の方程式に対する数値計算

千葉悠喜

東京大学大学院数理科学研究科 博士 2 年
<http://ychiba.sakura.ne.jp/>

応用数学フレッシュマンセミナー 2018
京都大学
2018 年 11 月 13 日

1. 数値解析とは
2. 滑らかな領域に対するの数値計算の注意点
3. 滑らかな領域上の Robin 境界条件を持つ Poisson 方程式

1. 数値解析とは

数値解析

解くのが“困難”な問題に対し、その近似解を求める方法を導出し、その“妥当性”を検証する分野.

問題 (PDE など)

困難
→

厳密解

数値解析

数値解析

解くのが“困難”な問題に対し、その近似解を求める方法を導出し、その“妥当性”を検証する分野.

問題 (PDE など)

↓ 離散化など

近似問題

困難

→

→

(比較的) 容易

厳密解

↑ 収束, 誤差評価など

近似解

数値解析

PDE の数値解析において重要なのは次の点

可解性

近似問題の解は存在するか？ 現実的に解くことができるか？

収束性

厳密解 u と近似解 u_N が $N \rightarrow \infty$ としたとき $u_N \rightarrow u$ となっているか？
その誤差 $\|u - u_N\|$ は N などを用いてどう評価されるか？

構造保存

厳密解が持っている性質と同様の性質を近似解でも保っているか？

偏微分方程式の数値計算手法

差分法 (Finite Difference Method)

領域を格子状に切り，微分を格子点上の値を用いた差分に置き換えて計算を行う。

有限要素法 (Finite Element Method)

領域を三角形などの小さな要素に分割し，各要素上で多項式となるような関数を用いて近似を行う。

有限体積法 (Finite Volume Method)

領域を小さな要素に分割し，保存量に注目して区分的定数関数を用いて近似を行う。

2. 滑らかな領域に対するの数値計算の注意点

滑らかな領域

現実の問題の数値計算をするにあたって、滑らかな領域上の方程式に対する数値計算は重要である。

有限要素法の場合、元の領域 Ω を多角形領域 Ω_h で近似し、 Ω_h 上の方程式と見なして数値計算を行うことが多い。

元の問題

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx$$

→

近似問題

$$\int_{\Omega_h} \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_{\Omega_h} \tilde{f} v \, dx$$

Ω_h をどのように選ぶかが重要である。

滑らかな領域

現実の問題の数値計算をするにあたって、滑らかな領域上の方程式に対する数値計算は重要である。

有限要素法の場合、元の領域 Ω を多角形領域 Ω_h で近似し、 Ω_h 上の方程式と見なして数値計算を行うことが多い。

元の問題

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx$$

→

近似問題

$$\int_{\Omega_h} \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_{\Omega_h} \tilde{f} v \, dx$$

Ω_h をどのように選ぶかが重要である。

近似の仕方によっては、元の問題と異なる問題の近似解を求めてしまうことがある。

Babuška のパラドックス

$$\begin{cases} -\Delta^2 u = 1 & \text{in } \Omega \\ u = \frac{\partial^2 u}{\partial \nu^2} = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases} \quad (\text{A})$$

Ω : 2次元の単位円板, ν : 外向き単位法線ベクトル

(A) の解は $u(x, y) = (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 5)/64$.

Babuška のパラドックス

$$\begin{cases} -\Delta^2 u = 1 & \text{in } \Omega \\ u = \frac{\partial^2 u}{\partial \nu^2} = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases} \quad (\text{A})$$

Ω : 2次元の単位円板, ν : 外向き単位法線ベクトル

(A) の解は $u(x, y) = (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 5)/64$.

$$\begin{cases} -\Delta^2 u_n = 1 & \text{in } \Omega_n \\ u_n = \frac{\partial^2 u_n}{\partial \nu_n^2} = 0 & \text{on } \partial\Omega_n \end{cases} \quad (\text{B}_n)$$

Ω_n : Ω に内接する正 n 角形, ν_n : 外向き単位法線ベクトル

Babuška のパラドックス

$$\begin{cases} -\Delta^2 u = 1 & \text{in } \Omega \\ u = \frac{\partial^2 u}{\partial \nu^2} = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases} \quad (\text{A})$$

Ω : 2次元の単位円板, ν : 外向き単位法線ベクトル

(A) の解は $u(x, y) = (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 5)/64$.

$$\begin{cases} -\Delta^2 u_n = 1 & \text{in } \Omega_n \\ u_n = \frac{\partial^2 u_n}{\partial \nu_n^2} = 0 & \text{on } \partial\Omega_n \end{cases} \quad (\text{B}_n)$$

Ω_n : Ω に内接する正 n 角形, ν_n : 外向き単位法線ベクトル

(B_n) の解 u_n は $n \rightarrow \infty$ で $u_n \rightarrow u$ とはならない.

ある辺 Γ_j に関する外向き単位法線ベクトルは

$\nu_n = (x_j, y_j) = (\cos \alpha, \sin \alpha)$ となる.

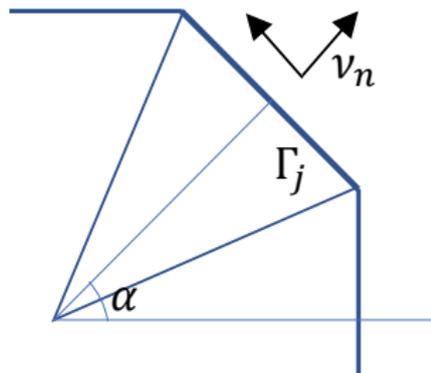
u_n は Γ_j 上 0 であるから, Γ_j 上

$-\partial_x u_n y_j + \partial_y u_n x_j = 0$ かつ

$\partial_{xx} u_n y_j^2 - 2\partial_{xy} u_n x_j y_j + \partial_{yy} u_n x_j^2 = 0.$

境界条件より, Γ_j 上

$\partial_{xx} u_n x_j^2 + 2\partial_{xy} u_n x_j y_j + \partial_{yy} u_n y_j^2 = 0.$



Babuška のパラドックス

ある辺 Γ_j に関する外向き単位法線ベクトルは

$\nu_n = (x_j, y_j) = (\cos \alpha, \sin \alpha)$ となる。

u_n は Γ_j 上 0 であるから、 Γ_j 上

$-\partial_x u_n y_j + \partial_y u_n x_j = 0$ かつ

$\partial_{xx} u_n y_j^2 - 2\partial_{xy} u_n x_j y_j + \partial_{yy} u_n x_j^2 = 0$.

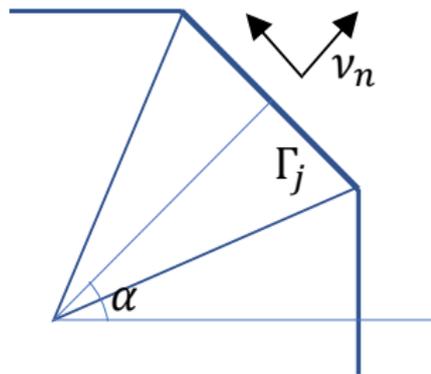
境界条件より、 Γ_j 上

$\partial_{xx} u_n x_j^2 + 2\partial_{xy} u_n x_j y_j + \partial_{yy} u_n y_j^2 = 0$.

したがって、 Γ_j 上 $\frac{\partial^2 u}{\partial \nu_n^2} = \Delta u = 0$ となり、 (B_n)

は次の方程式 (B'_n) と同値。

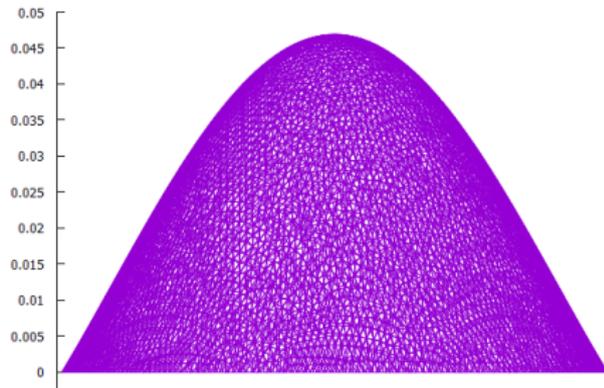
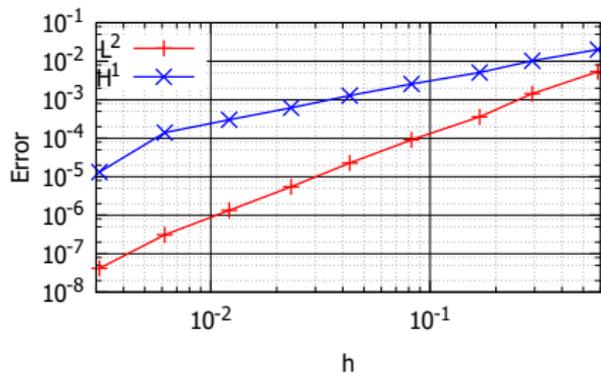
$$\begin{cases} -\Delta^2 u_n = 1 & \text{in } \Omega_n \\ u_n = \Delta u = 0 & \text{on } \partial\Omega_n \end{cases} \quad (B'_n)$$



Babuška のパラドックス

(B'_n) の解 u_n は $n \rightarrow \infty$ で $v(x, y) = (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 3)/64$ に収束する。 v は次の方程式の解である。

$$\begin{cases} -\Delta^2 v = 1 & \text{in } \Omega \\ v = \Delta v = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases} \quad (A')$$



誤差を考える領域

厳密解 u は Ω 上の関数であり、近似解 u_h は Ω_h 上の関数である。
→ 誤差をどちらの領域で扱うかによって用いる評価が異なる。

Ω_h で扱う場合

u を適切な拡張作用素を用いて \tilde{u} に拡張し、 $\|\tilde{u} - u_h\|_{\Omega_h}$ を評価する。
→ Boundary-skin 評価を用いる。 (cf. Kashiwabara & Oikawa & Zhou(2016))

Ω で扱う場合

Ω と Ω_h の 1 対 1 対応を用いて、 u_h を Ω 上の関数 u_h^l に持ち上げ、 $\|u - u_h^l\|_{\Omega}$ を評価する。
→ 対応写像 G_h の評価を用いる。 (cf. Elliott & Ranner(2012))

3. 滑らかな領域上の Robin 境界条件を持つ Poisson 方程式

Poisson 方程式

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} + \frac{1}{\varepsilon}u = \frac{1}{\varepsilon}u_0 + g & \text{on } \Gamma \end{cases} \quad (1)$$

$\Omega \subset \mathbb{R}^2$, 境界 $\Gamma = \partial\Omega$ は十分滑らか

$0 < \varepsilon < \infty$, ν : 外向き単位法線ベクトル

標準的な有限要素法 : Barrett & Elliott(1988)

Nitsche 法, 不連続 Galerkin 法のスキームと誤差評価を行った.

Nitsche 法

1971 年に Nitsche によって提唱された, (主に Diriclet 境界条件の場合において) 境界条件を関数空間ではなく, 適切な重みをつけて弱形式に組み込んで計算を行う数値解法.

不連続 Galerkin 法 (DG 法)

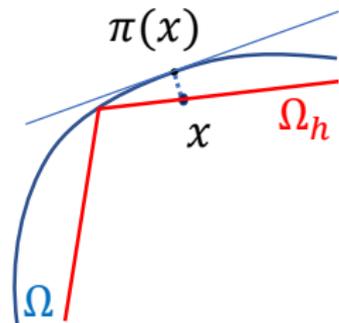
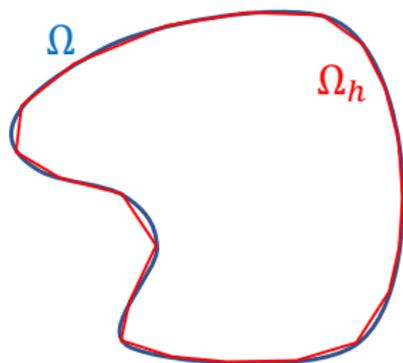
1973 年に Reed と Hill によって提唱された, 各要素上で多項式となる不連続関数を用い, 要素間の連続性を数値流速と呼ばれる値を用いて制御して計算する数値解法.

Ω_h : 多角形領域, $\mathcal{T}_h : \Omega_h$ の正則な三角形分割, $\mathcal{E}_h : \Gamma_h = \partial\Omega_h$ の分割

仮定 1 (cf. Kashiwabara-Oikawa-Zhou(2016))

- 1) メッシュサイズ h が十分小さい.
- 2) $E \in \mathcal{E}_h$ の頂点がすべて Γ 上にある.

Γ と Γ_h に対し, 適切な 1 対 1 対応 π をとることができる.



滑らかな領域 $\tilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^d$ を Ω, Ω_h および Γ の近傍を含むように選び、
 $P: H^s(\Omega) \rightarrow H^s(\tilde{\Omega})$ を有界な拡張作用素とする。

仮定 2 (問題の仮定)

$\tilde{f} = Pf \in H^2(\tilde{\Omega})$ とし、 u_0, g はそれぞれ $\tilde{\Omega}$ 上の関数 $\tilde{u}_0, \tilde{g} \in H^3(\tilde{\Omega})$ の Γ への制限であるとする。また、(1) の解 $u \in H^4(\Omega)$ とする。

有限要素空間 V_h

$$V_h := \{\chi \in C(\bar{\Omega}) : \chi|_T \in \mathcal{P}^1(T) \forall T \in \mathcal{T}_h\}$$

このとき、射影 $\Pi_h: H^2(\Omega_h) \rightarrow V_h$ が存在し、
 $T \in \mathcal{T}_h, m = 0, 1, 2, w \in H^2(T)$ に対し、次を満たす。

$$|w - \Pi_h w|_{m,T} \leq Ch^{2-m} \|w\|_{2,T}$$

Nitsche 法

$$\begin{aligned} \text{Find } u_h \in V_h \text{ s.t.} \\ a_h(u_h, \chi) = l_h(\chi) \quad \forall \chi \in V_h \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} a_h(w, v) &= (\nabla w, \nabla v)_{\Omega_h} + \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \left\{ -\frac{\gamma h_E}{\varepsilon + \gamma h_E} \left(\left\langle \frac{\partial w}{\partial \nu_h}, v \right\rangle_E + \left\langle w, \frac{\partial v}{\partial \nu_h} \right\rangle_E \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\varepsilon + \gamma h_E} \langle w, v \rangle_E - \frac{\varepsilon \gamma h_E}{\varepsilon + \gamma h_E} \left\langle \frac{\partial w}{\partial \nu_h}, \frac{\partial v}{\partial \nu_h} \right\rangle_E \right\} \\ l_h(v) &= (\tilde{f}, v)_{\Omega_h} + \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \left\{ \frac{1}{\varepsilon + \gamma h_E} \left\langle \tilde{u}_0, v - \gamma h_E \frac{\partial v}{\partial \nu_h} \right\rangle_E \right. \\ &\quad \left. + \frac{\varepsilon}{\varepsilon + \gamma h_E} \left\langle \tilde{g}, v - \gamma h_E \frac{\partial v}{\partial \nu_h} \right\rangle_E \right\} \end{aligned}$$

$h_E = \text{diam } E$, $\gamma > 0$: 十分小さな定数

双線形形式の性質

$H^s(\Omega_h) + V_h$ ($s > 3/2$) に対し, 以下の2つのノルムを定める.

$$\|v\|_h^2 := \|\nabla v\|_{0,\Omega_h}^2 + \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \frac{1}{\varepsilon + h_E} \|v\|_{0,E}^2$$

$$\|v\|_{h,*}^2 := \|v\|_h^2 + \sum_{E \in \mathcal{E}_h} h_E \left\| \frac{\partial v}{\partial \nu_h} \right\|_{0,E}^2$$

補題 1 (連続性, 強圧性)

$$a_h(w, v) \leq C \|w\|_{h,*} \|v\|_{h,*} \quad w, v \in H^s(\Omega_h) + V_h, \quad (s > 3/2)$$

が成り立つ. さらに, γ が十分小さいならば,

$$a_h(\chi, \chi) \geq C \|\chi\|_h^2 \quad \chi \in V_h$$

が成り立つ.

一般に, $u \notin H^s(\Omega_h)$ であり, $\tilde{u} = Pu$ としても, $a_h(\tilde{u}, v) \neq l_h(v)$ である.

補題 2

u, u_h をそれぞれ (1), (2) の解とする。このとき, γ が十分小さいならば, 以下が成り立つ。

$$\|\tilde{u} - u_h\|_{h,*} \leq C \left[\inf_{\xi \in V_h} \|\tilde{u} - \xi\|_{h,*} + \sup_{\chi \in V_h} \frac{|a_h(\tilde{u}, \chi) - l_h(\chi)|}{\|\chi\|_h} \right] \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \|\tilde{u} - u_h\|_{0, \Omega_h} \leq & C \left[\|\tilde{u} - u_h\|_{0, \Omega_h \setminus \Omega} + h \|\tilde{u} - u_h\|_{h,*} \right. \\ & + \sup_{z \in H^2(\Omega)} \|z\|_{2, \Omega}^{-1} \left(\|\tilde{z} - \Pi_h \tilde{z}\|_{h,*} \|\tilde{u} - u_h\|_{h,*} \right. \\ & \left. \left. + |a_h(\tilde{u}, \Pi_h \tilde{z}) - l_h(\Pi_h \tilde{z})| \right) \right] \quad (4) \end{aligned}$$

ただし, $\tilde{u} = Pu$, $\tilde{z} = Pz$ である。

定理 1

補題 2 の仮定のもとで以下が成り立つ.

$$\|\tilde{u} - u_h\|_{h,*} \leq Ch(\|u\|_{3,\Omega} + \|\tilde{u}_0\|_{1,\tilde{\Omega}} + \|\tilde{g}\|_{1,\tilde{\Omega}})$$

$$\|\tilde{u} - u_h\|_{0,\Omega_h} \leq Ch^2(\|u\|_{4,\Omega} + \|\tilde{u}_0\|_{3,\tilde{\Omega}} + \|\tilde{g}\|_{3,\tilde{\Omega}})$$

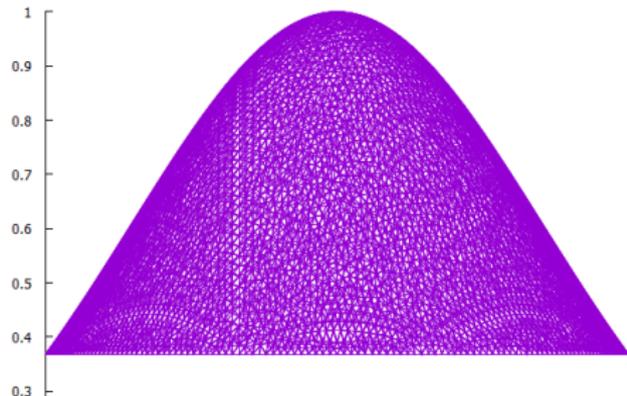
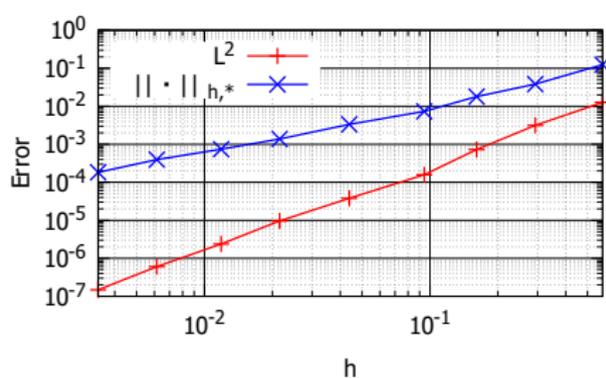
ただし, $\tilde{u} = Pu$ である.

証明には, Boundary-skin 評価を用いる.

数値計算

$\Omega = \{|x| < 1\} \subset \mathbb{R}^2$, 厳密解 $u(x, y) = \exp(-x^2 - y^2)$

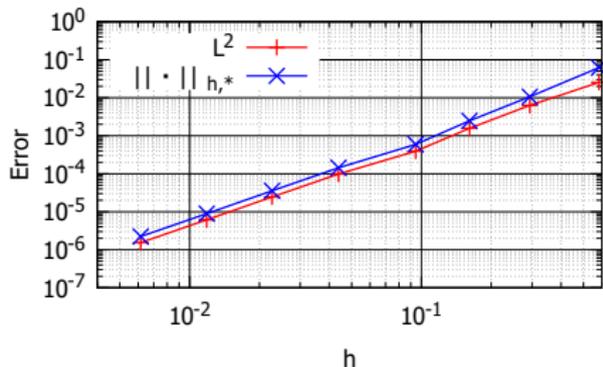
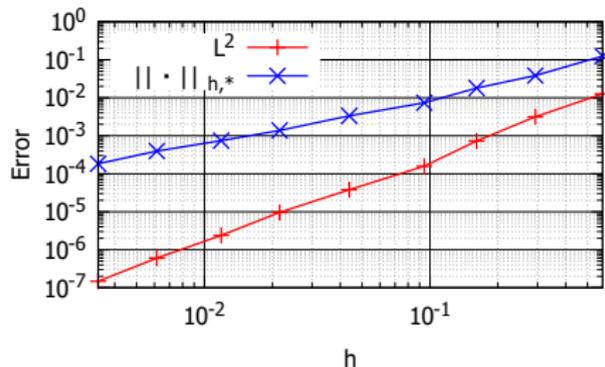
FreeFem++で Nitsche 法の近似解を計算し, 厳密解との誤差を計算した.



$\|\cdot\|_{h,*}$ ノルムが $O(h)$, L^2 ノルムが $O(h^2)$ となっている.

数値計算

$\Omega = \{|x| < 1\} \subset \mathbb{R}^2$, 厳密解 $u(x, y) = \exp(-x^2 - y^2)$
区分的 2 次多項式でも同様に数値計算を行った (右)



どちらも $O(h^2)$ となっている。領域の近似による誤差の影響がわかる。

流体構造連成モデル (FSI モデル)

- ▶ 流体とその周りの構造の相互作用を含めて計算を行う。
- ▶ 血管のように壁が薄い円筒領域を液体が流れる問題では、壁の厚さ方向の値が同じと見なして計算を行う reduced-FSI モデルが用いられる。

→ 境界条件に接方向の微分が含まれる

標準的な有限要素法では滑らかな領域に対する研究も盛ん
reduced-FSI モデルと関連する、動的境界条件についての研究も行われている。(Kovács & Lubich(2017))
DG 法等については、そのような研究はそこまで行われていない。

最終目標：reduced-FSI モデルへの DG 法の適用

現在：滑らかな領域上の Robin 境界条件を持つ Poisson 方程式に対する、Nitsche 法，DG 法の適用とその解析

次の目標：一般化 Robin 境界条件や、その時間発展である動的境界条件に対して、DG 法の適用とその解析