滑らかな領域上のRobin境界条件を持つPoisson方程式に対するNitsche法

千葉悠喜，齊藤宣一(東京大学数理科学研究科) e-mail:ychiba@ms.u-tokyo.ac.jp

研究目的

流体構造連成モデル(FSIモデル)

- 流体とその周りの構造の相互作用を含めて計算
- 壁が薄い円筒領域を液体が流れる問題では，壁の厚さ方向の値が同じと見なして計算を行うreduced-FSIモデルが用いられる

→境界条件に接方向の微分が含まれる

滑らかな領域における数値計算

- 有限要素法では領域を多角形等で近似して計算

→問題の近似の仕方によっては元の問題と異なる問題の近似解を求めてしまうことがある(e.g. Babuškaのパラドックス)

滑らかな領域上のreduced-FSIモデルの数値計算では特に注意が必要

最終目標：reduced-FSIモデルへのDG法の適用

[1]と[2]を参考に，滑らかな領域上のRobin境界条件を持つPoisson方程式に対する，Nitsche法の適用とその解析

モデル方程式

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} + \dfrac{1}{\varepsilon} u = \dfrac{1}{\varepsilon} u_0 + g & \text{on } \Gamma \end{cases} \tag{1}$$

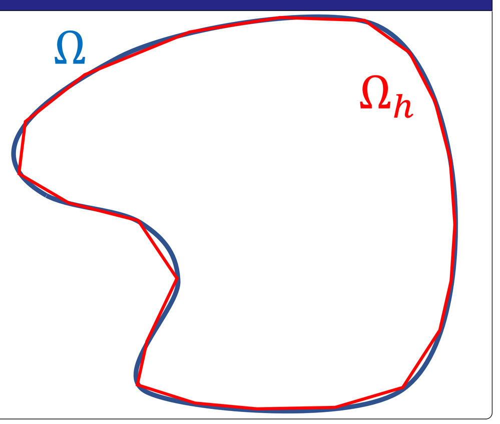
$\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ($d = 2$または3)，境界$\Gamma = \partial\Omega$は十分滑らか

$0 < \varepsilon < \infty$，ν：外向き単位法線ベクトル

Ω_h：多角形領域，$\mathcal{T}_h$：Ω_hの正則な三角形分割，$\mathcal{E}_h$：$\Gamma_h = \partial\Omega_h$の分割

仮定 1 (多角形領域の仮定 cf. [3])

1) メッシュサイズhが十分小さい
2) $E \in \mathcal{E}_h$の頂点がすべてΓ上にある



滑らかな領域$\tilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^d$を$\Omega, \Omega_h$および，$\Gamma$の近傍を含むように選び，

$P\colon H^s(\Omega) \to H^s(\tilde{\Omega})$を有界な拡張作用素とする．

仮定 2 (問題の仮定)

$\tilde{f} = Pf \in H^2(\tilde{\Omega})$とし，$u_0$, gはそれぞれ$\tilde{\Omega}$上の関数$\tilde{u}_0$, $\tilde{g} \in H^3(\tilde{\Omega})$の$\Gamma$への制限であるとする．また，(1)の解$u \in H^4(\Omega)$とする．

$V_h := \{\chi \in C(\overline{\Omega})\colon \chi|_T \in \mathcal{P}^1(T)\ {}^\forall T \in \mathcal{T}_h\}$を有限要素空間とする．

Nitsche法

$$\text{Find} \quad u_h \in V_h \quad \text{s.t.} \qquad a_h(u_h, \chi) = l_h(\chi) \quad {}^\forall \chi \in V_h \tag{2}$$

$$a_h(w, v) = (\nabla w, \nabla v)_{\Omega_h} + \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \Big\{ -\frac{\gamma h_E}{\varepsilon + \gamma h_E} \Big(\langle \frac{\partial w}{\partial \nu_h}, v \rangle_E + \langle w, \frac{\partial v}{\partial \nu_h} \rangle_E \Big) + \frac{1}{\varepsilon + \gamma h_E} \langle w, v \rangle_E - \frac{\varepsilon \gamma h_E}{\varepsilon + \gamma h_E} \langle \frac{\partial w}{\partial \nu_h}, \frac{\partial v}{\partial \nu_h} \rangle_E \Big\}$$

$$l_h(v) = (\tilde{f}, v)_{\Omega_h} + \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \Big\{ \frac{1}{\varepsilon + \gamma h_E} \langle \tilde{u}_0, v - \gamma h_E \frac{\partial v}{\partial \nu_h} \rangle_E + \frac{\varepsilon}{\varepsilon + \gamma h_E} \langle \tilde{g}, v - \gamma h_E \frac{\partial v}{\partial \nu_h} \rangle_E \Big\}$$

$h_E = \operatorname{diam} E$，$\gamma > 0$：十分小さな定数

$H^s(\Omega_h) + V_h$ ($s > 3/2$)に対し，以下の2つのノルムを定める．

$$\|v\|_h^2 := \|\nabla v\|_{0,\Omega_h}^2 + \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \frac{1}{\varepsilon + h_E} \|v\|_{0,E}^2$$

$$\|v\|_{h,*}^2 := \|v\|_h^2 + \sum_{E \in \mathcal{E}_h} h_E \Big\| \frac{\partial v}{\partial \nu_h} \Big\|_{0,E}^2$$

補題 1

u, u_hをそれぞれ(1)，(2)の解とする．このとき，γが十分小さいならば，以下が成り立つ．

$$\|\tilde{u} - u_h\|_{h,*} \le C \Big[\inf_{\xi \in V_h} \|\tilde{u} - \xi\|_{h,*} + \sup_{\chi \in V_h} \frac{|a_h(\tilde{u}, \chi) - l_h(\chi)|}{\|\chi\|_h} \Big] \tag{3}$$

$$\begin{aligned} \|\tilde{u} - u_h\|_{0,\Omega_h} \le C \Big[& \|\tilde{u} - u_h\|_{0,\Omega_h \setminus \Omega} + h \|\tilde{u} - u_h\|_{h,*} \\ & + \sup_{z \in H^2(\Omega)} \|z\|_{2,\Omega}^{-1} \Big(\|\tilde{z} - \Pi_h \tilde{z}\|_{h,*} \|\tilde{u} - u_h\|_{h,*} \\ & + |a_h(\tilde{u}, \Pi_h \tilde{z}) - l_h(\Pi_h \tilde{z})| \Big) \Big] \end{aligned} \tag{4}$$

ただし，$\tilde{u} = Pu$，$\tilde{z} = Pz$である．

定理 1

補題1の仮定のもとで以下が成り立つ．

$$\|\tilde{u} - u_h\|_{h,*} \le Ch(\|u\|_{3,\Omega} + \|\tilde{u}_0\|_{1,\tilde{\Omega}} + \|\tilde{g}\|_{1,\tilde{\Omega}}) \tag{5}$$

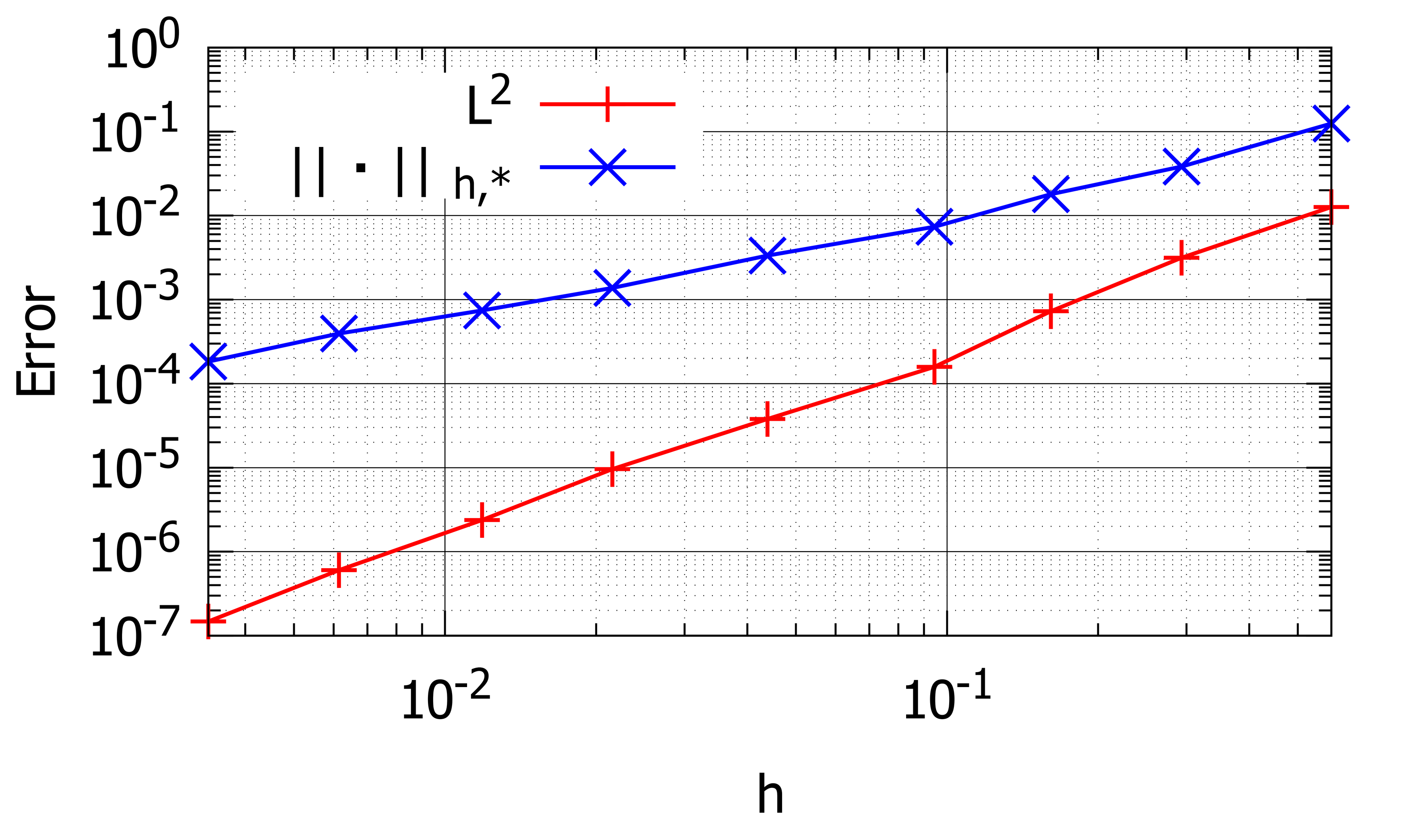
$$\|\tilde{u} - u_h\|_{0,\Omega_h} \le Ch^2(\|u\|_{4,\Omega} + \|\tilde{u}_0\|_{3,\tilde{\Omega}} + \|\tilde{g}\|_{3,\tilde{\Omega}}) \tag{6}$$

ただし，$\tilde{u} = Pu$である．

数値計算

$\Omega = \{|x| < 1\} \subset \mathbb{R}^2$，厳密解$u(x, y) = \exp(-x^2 - y^2)$

FreeFem++でNitsche法の近似解を計算し，厳密解との誤差を計算した．



$\|\cdot\|_{h,*}$ノルムが$O(h)$，L^2ノルムが$O(h^2)$となっている．

今後の課題

- 一般化Robin境界条件や，その時間発展である動的境界条件に対する，本手法の適用
- 本手法を基にした，滑らかな領域上の方程式に対するDG法のスキームの開発と評価

参考文献

[1] J. W. Barrett, and C. M. Elliott, *IMA Journal of Numerical Analysis*, 8(3), 1988, 321–342

[2] M. Juntunen, and R. Stenberg, *Mathematics of Computation*, 78(267), 2009, 1353–1374

[3] T. Kashiwabara, I. Oikawa, and G. D. Zhou, *Numerische Mathematik*, 134(4), 2016, 705–740