

滑らかな領域上の Robin 境界条件を持つ Poisson 方程式に対する Nitsche 法

千葉悠喜 齊藤宣一

東京大学大学院数理科学研究科

日本数学会 2018 年度秋季総合分科会

岡山大学

2018 年 9 月 26 日

目次

1. はじめに
2. モデル方程式とスキーム
3. スキームの解析
4. 数値計算

1. はじめに

はじめに

流体構造連成モデル (FSI モデル)

- ▶ 流体とその周りの構造の相互作用を含めて計算を行う。
- ▶ 血管のように壁が薄い円筒領域を液体が流れる問題では、壁の厚さ方向の値が同じと見なして計算を行う reduced-FSI モデルが用いられる。

→ 境界条件に接方向の微分が含まれる

滑らかな領域における数値計算

- ▶ 有限要素法では領域を多角形や多面体で近似して計算を行っている。

→ 問題の近似の仕方によっては元の問題と異なる問題の近似解を求めてしまうことがある (e.g. Babuška のパラドックス)

滑らかな領域における reduced-FSI モデルの数値計算では特に注意が必要

標準的な有限要素法

滑らかな領域に対する研究も盛ん

reduced-FSI モデルと関連する、動的境界条件についての研究も行われている。(Kovács & Lubich(2017))

DG 法, HDG 法については, そのような研究はそこまで行われていない.

最終目標 : reduced-FSI モデルへの DG 法の適用

滑らかな領域上の Robin 境界条件を持つ Poisson 方程式に対する, Nitsche 法の適用とその解析

関連する先行研究

- ▶ Barrett & Elliott(1988)
滑らかな領域上の Neumann, Robin 境界条件に対する標準的な有限要素法
- ▶ Juntunen & Stenberg(2008)
多角形領域上の Neumann, Robin 境界条件に対する Nitsche 法

2. モデル方程式とスキーム

Poisson 方程式

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} + \frac{1}{\varepsilon}u = \frac{1}{\varepsilon}u_0 + g & \text{on } \Gamma \end{cases} \quad (1)$$

$\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ($d = 2$ または 3), 境界 $\Gamma = \partial\Omega$ は十分滑らか
 $f \in L^2(\Omega)$, $u_0 \in L^2(\Gamma)$, $g \in H^{1/2}(\partial\Omega)$
 $0 < \varepsilon < \infty$, ν : 外向き単位法線ベクトル

$\varepsilon \rightarrow 0$: Diriclet 境界条件, $\varepsilon \rightarrow \infty$: Neumann 境界条件

仮定 1 (cf. Kashiwabara-Oikawa-Zhou(2016))

局所座標系 $\{(U_r, y_r, \phi_r)\}_{r=1}^M$ が存在し、次を満たす.

- (1) $\{U_r\}$ は $\Gamma = \partial\Omega$ の開被覆である.
- (2) $y_r = (y_{r1}, \dots, y_{rn-1}, y_{rn}) = (y'_r, y_{rn})$ は元の座標 x を回転させたものである.
- (3) $\Delta_r := \{y'_r \in R^{n-1} : |t'_r| < \alpha\}$ 上で ϕ_r は滑らかであり、そのグラフは $\Gamma \cap U_r$ である.

ここで、 α は適当な正定数である.

ある $h_0 > 0$ が存在して、任意の $x \in \Gamma$ に対し、ある r が存在して $B(x, h_0) \subset U_r$ となる.

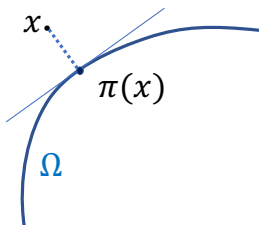
準備-領域

Γ との符号付き距離関数 $d(x)$ を次のように定める.

$$d(x) = \begin{cases} -\text{dist}(x, \Gamma) & \text{if } x \in \Omega \\ \text{dist}(x, \Gamma) & \text{if } x \in \Omega^c \end{cases}$$

$\Gamma(\delta) := \{x \in \mathbb{R}^n : |d(x)| < \delta\}$ とする. δ が十分小さいならば, 次を満たす直交射影 $\pi: \Gamma(\delta) \rightarrow \Gamma$ が存在する.

$$x = \pi(x) + d(x)\nu(\pi(x))$$



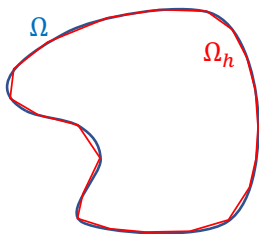
準備-領域

Ω_h : 多角形領域, \mathcal{T}_h : Ω_h の正則な三角形分割, \mathcal{E}_h : $\Gamma_h = \partial\Omega_h$ の分割

仮定 2 (cf. KOZ(2016))

- 1) メッシュサイズ h について $h < \min\{h_0, 1\}$ となる.
- 2) $r = 1, \dots, M$ に対し, $\Gamma_h \cap U_r$ が関数 ϕ_{rh} のグラフにより表現される.
- 3) $E \in \mathcal{E}_h$ の頂点がすべて Γ 上にある.

h を十分小さくすることで, $\pi|_{\Gamma_h}$ は逆写像 $\pi^*(x) = x + t^*(x)\nu(x)$ を持ち, $\|t^*\|_{0,\infty,\Gamma} \leq C_{0E}h^2$ となる.



補題 1 (Boundary-skin 評価 (KOZ(2016),
Kashiwabara-Kemmochi(preprint)))

$C_{0E}h^2 \leq \delta \leq 2C_{0E}h^2$ に対し, 以下が成り立つ.

$$\left| \int_{\pi(E)} f d\gamma - \int_E f \circ \pi d\gamma_h \right| \leq Ch^2 \int_{\pi(E)} |f| d\gamma \quad f \in L^1(\pi(E)), E \in \mathcal{E}_h \quad (2)$$

$$\|f - f \circ \pi\|_{L^p(\Gamma_h)} \leq C\delta^{1-1/p} \|f\|_{W^{1,p}(\Gamma(\delta))} \quad f \in W^{1,p}(\Gamma(\delta)) \quad (3)$$

$$\|f\|_{L^p(\Gamma(\delta))} \leq C(\delta \|\nabla f\|_{L^p(\Gamma(\delta))} + \delta^{1/p} \|f\|_{L^p(\Gamma)}) \quad f \in W^{1,p}(\Gamma(\delta)) \quad (4)$$

$$\|f\|_{L^p(\Omega_h \setminus \Omega)} \leq C(\delta \|\nabla f\|_{L^p(\Omega_h \setminus \Omega)} + \delta^{1/p} \|f\|_{L^p(\Gamma_h)}) \quad f \in W^{1,p}(\Omega_h) \quad (5)$$

$$\|\nu_h - \nu \circ \pi\|_{L^\infty(\Gamma_h)} \leq Ch \quad (6)$$

$\nu_h : \Gamma_h$ の外向き単位法線ベクトル

準備-有限要素

滑らかな領域 $\tilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^d$ を $\Omega, \Omega_h, \Gamma(C_{0E}h^2)$ を含むように選び,
 $P: H^s(\Omega) \rightarrow H^s(\tilde{\Omega})$ を有界な拡張作用素とする.

仮定 3 (問題の仮定)

$\tilde{f} = Pf \in H^2(\tilde{\Omega})$ とし, u_0, g はそれぞれ $\tilde{\Omega}$ 上の関数 $\tilde{u}_0, \tilde{g} \in H^3(\tilde{\Omega})$ の Γ への制限であるとする. また, (1) の解 $u \in H^4(\Omega)$ とする.

有限要素空間 V_h

$$V_h := \{\chi \in C(\bar{\Omega}) : \chi|_T \in \mathcal{P}^1(T) \forall T \in \mathcal{T}_h\}$$

このとき, 射影 $\Pi_h: H^2(\Omega_h) \rightarrow V_h$ が存在し,
 $T \in \mathcal{T}_h, m = 0, 1, 2, w \in H^2(T)$ に対し, 次を満たす.

$$|w - \Pi_h w|_{m,T} \leq Ch^{2-m} \|w\|_{2,T}$$

Nitsche 法

$$\begin{aligned} \text{Find } u_h \in V_h \text{ s.t.} \\ a_h(u_h, \chi) = l_h(\chi) \quad \forall \chi \in V_h \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} a_h(w, v) = (\nabla w, \nabla v)_{\Omega_h} + \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \left\{ -\frac{\gamma h_E}{\varepsilon + \gamma h_E} \left(\left\langle \frac{\partial w}{\partial \nu_h}, v \right\rangle_E + \left\langle w, \frac{\partial v}{\partial \nu_h} \right\rangle_E \right) \right. \\ \left. + \frac{1}{\varepsilon + \gamma h_E} \langle w, v \rangle_E - \frac{\varepsilon \gamma h_E}{\varepsilon + \gamma h_E} \left\langle \frac{\partial w}{\partial \nu_h}, \frac{\partial v}{\partial \nu_h} \right\rangle_E \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} l_h(v) = (\tilde{f}, v)_{\Omega_h} + \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \left\{ \frac{1}{\varepsilon + \gamma h_E} \left\langle \tilde{u}_0, v - \gamma h_E \frac{\partial v}{\partial \nu_h} \right\rangle_E \right. \\ \left. + \frac{\varepsilon}{\varepsilon + \gamma h_E} \left\langle \tilde{g}, v - \gamma h_E \frac{\partial v}{\partial \nu_h} \right\rangle_E \right\} \end{aligned}$$

$h_E = \text{diam } E$, $\gamma > 0$: 十分小さな定数

3. スキームの解析

双線形式の性質

$H^s(\Omega_h) + V_h$ ($s > 3/2$) に対し, 以下の2つのノルムを定める.

$$\|v\|_h^2 := \|\nabla v\|_{0,\Omega_h}^2 + \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \frac{1}{\varepsilon + h_E} \|v\|_{0,E}^2$$

$$\|v\|_{h,*}^2 := \|v\|_h^2 + \sum_{E \in \mathcal{E}_h} h_E \left\| \frac{\partial v}{\partial \nu_h} \right\|_{0,E}^2$$

補題 2 (連続性, 強圧性)

$$a_h(w, v) \leq C \|w\|_{h,*} \|v\|_{h,*} \quad w, v \in H^s(\Omega_h) + V_h, \quad (s > 3/2)$$

が成り立つ. さらに, γ が十分小さいならば,

$$a_h(\chi, \chi) \geq C \|\chi\|_h^2 \quad \chi \in V_h$$

が成り立つ.

一般に, $u \notin H^s(\Omega_h)$ であり, $\tilde{u} = Pu$ としても, $a_h(\tilde{u}, v) \neq l_h(v)$ である.

補題 3

u, u_h をそれぞれ (1), (7) の解とする。このとき, γ が十分小さいならば, 以下が成り立つ。

$$\|\tilde{u} - u_h\|_{h,*} \leq C \left[\inf_{\xi \in V_h} \|\tilde{u} - \xi\|_{h,*} + \sup_{\chi \in V_h} \frac{|a_h(\tilde{u}, \chi) - l_h(\chi)|}{\|\chi\|_h} \right] \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \|\tilde{u} - u_h\|_{0,\Omega_h} \leq & C \left[\|\tilde{u} - u_h\|_{0,\Omega_h \setminus \Omega} + h \|\tilde{u} - u_h\|_{h,*} \right. \\ & + \sup_{z \in H^2(\Omega)} \|z\|_{2,\Omega}^{-1} \left(\|\tilde{z} - \Pi_h \tilde{z}\|_{h,*} \|\tilde{u} - u_h\|_{h,*} \right. \\ & \left. \left. + |a_h(\tilde{u}, \Pi_h \tilde{z}) - l_h(\Pi_h \tilde{z})| \right) \right] \quad (9) \end{aligned}$$

ただし, $\tilde{u} = Pu$, $\tilde{z} = Pz$ である。

略証. Step 1

$\xi \in V_h$ とし, $\chi = u_h - \xi$ とする. 双線形形式の性質より,

$$\begin{aligned}\|\chi\|_h^2 &\leq C a_h(\chi, \chi) = C(l_h(\chi) - a_h(\xi, \chi)) \\ &= C(a_h(\tilde{u} - \xi, \chi) - a_h(\tilde{u}, \chi) + l_h(\chi)) \\ &\leq C \|\tilde{u} - \xi\|_{h,*} \|\chi\|_h + |a_h(\tilde{u}, \chi) - l_h(\chi)|\end{aligned}$$

多項式に対する逆不等式と三角不等式より, (8) が成り立つ.

略証. Step 2

$\eta \in L^2(\Omega_h)$ とし, $\tilde{\eta} \in L^2(\tilde{\Omega})$ を 0 拡張とする. $z \in H^2(\Omega)$ を

$$\begin{cases} -\Delta z = \tilde{\eta} & \text{in } \Omega \\ \frac{\partial z}{\partial \nu} + z/\varepsilon = 0 & \text{on } \Gamma \end{cases}$$

の解とする.

$$\begin{aligned} (\tilde{u} - u_h, \eta)_{\Omega_h} &= a_h(\tilde{u} - u_h, \tilde{z} - \Pi_h \tilde{z}) \\ &\quad + a_h(\tilde{u}, \Pi_h \tilde{z}) - l_h(\Pi_h \tilde{z}) + (\tilde{u} - u_h, \eta + \Delta \tilde{z})_{\Omega_h \setminus \Omega} \\ &\quad - \sum_{E \in E_h} \left[\frac{\varepsilon}{\varepsilon + \gamma h_E} \left\langle \frac{\partial \tilde{z}}{\partial \nu_h} + \frac{\tilde{z}}{\varepsilon}, (1 - \gamma h_E \frac{\partial}{\partial \nu_h})(\tilde{u} - u_h) \right\rangle_E \right] \end{aligned}$$

Boundary-skin 評価より, 3 行目を $h \|\tilde{u} - u_h\|_{h,*} \|\eta\|_{L^2(\Omega)}$ で上から評価でき, 他の評価と合わせて (9) が得られる.

定理 1

補題 3 の仮定のもとで以下が成り立つ.

$$\|\tilde{u} - u_h\|_{h,*} \leq Ch(\|u\|_{3,\Omega} + \|\tilde{u}_0\|_{1,\tilde{\Omega}} + \|\tilde{g}\|_{1,\tilde{\Omega}})$$

$$\|\tilde{u} - u_h\|_{0,\Omega_h} \leq Ch^2(\|u\|_{4,\Omega} + \|\tilde{u}_0\|_{3,\tilde{\Omega}} + \|\tilde{g}\|_{3,\tilde{\Omega}})$$

ただし, $\tilde{u} = Pu$ である.

略証. Step 1

$|a_h(\tilde{u}, \chi) - l_h(\chi)|$ および $|a_h(\tilde{u}, \Pi_h \tilde{z}) - l_h(\Pi_h \tilde{z})|$ を評価すればよい.

$$\begin{aligned} |a_h(\tilde{u}, \chi) - l_h(\chi)| &\leq \|\tilde{f} + \Delta \tilde{u}\|_{0,\Omega_h \setminus \Omega} \|\chi\|_{0,\Omega_h} \\ &\quad + \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \frac{\varepsilon}{\varepsilon + \gamma h_E} \left| \left\langle \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \nu_h} + \frac{\tilde{u} - \tilde{u}_0}{\varepsilon} - \tilde{g}, \chi - \gamma h_E \frac{\partial \chi}{\partial \nu_h} \right\rangle_E \right| \end{aligned}$$

略証. Step 2

$a(w, v)$, $l(v)$ を a_h, l_h における $(\cdot, \cdot)_{\Omega_h}$, $\frac{\partial}{\partial \nu_h}$, $\langle \cdot, \cdot \rangle_E$ を, それぞれ, $(\cdot, \cdot)_{\Omega}$, $\frac{\partial}{\partial \nu}$, $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\pi(E)}$ としたものと定める. このとき, $v \in H^s(\Omega) + V_h$ に対し, $a(u, v) = l(v)$ が成り立つ. これより,

$$\begin{aligned} a_h(\tilde{u}, \Pi_h \tilde{z}) - l_h(\Pi_h \tilde{z}) &= a_h(\tilde{u}, \Pi_h \tilde{z} - \tilde{z}) - l_h(\Pi_h \tilde{z} - \tilde{z}) \\ &\quad + a_h(\tilde{u}, \tilde{z}) - a(u, z) + l(z) - l_h(\tilde{z}) \end{aligned}$$

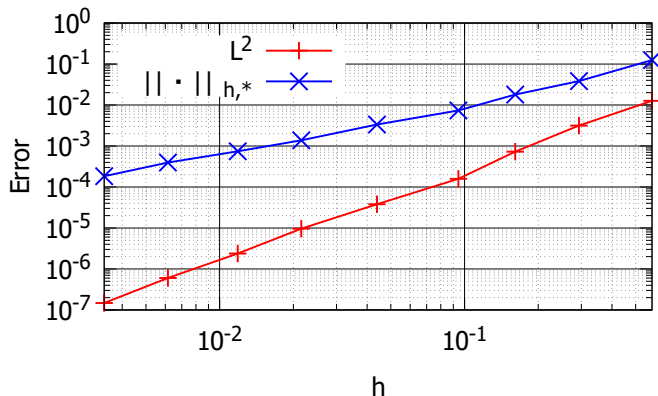
となり, 1 行目は補間誤差評価と合わせて求めたい評価が得られる. 2 行目を整理すると, $\int_{\Omega_h \setminus \Omega} \tilde{\cdot} dx, \int_{\Omega \setminus \Omega_h} \cdot dx, \int_E \tilde{\cdot} d\gamma - \int_{\pi(E)} \cdot d\gamma$ といった項が現れる. Boundary-skin 評価より求めたい評価が得られる.

4 . 数値計算

数値計算

$\Omega = \{|x| < 1\} \subset \mathbb{R}^2$, 厳密解 $u(x, y) = \exp(-x^2 - y^2)$

FreeFem++で Nitsche 法の近似解を計算し, 厳密解との誤差を計算した.



$\|\cdot\|_{h,*}$ ノルムが $O(h)$, L^2 ノルムが $O(h^2)$ となっている.

滑らかな領域上の Robin 境界条件を持つ Poisson 方程式に対する Nitsche 法について、 L^2 ノルムによる誤差評価を得た.

今後の課題

- ▶ 一般化 Robin 境界条件や、その時間発展である動的境界条件に対して、本手法の適用
- ▶ 本手法を基にした、滑らかな領域上の方程式に対する DG 法のスキームの開発と評価

定理 1 の証明の補足

$$\begin{aligned}
 & a_h(\tilde{u}, \tilde{z}) - a(u, z) + l(z) - l_h(\tilde{z}) \\
 &= \int_{\Omega_h \setminus \Omega} (\nabla \tilde{u} \cdot \nabla \tilde{z} - \tilde{f} \tilde{z}) dx - \int_{\Omega \setminus \Omega_h} (\nabla u \cdot \nabla z - fz) dx \\
 &+ \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \frac{1}{\varepsilon + \gamma h_E} \left[\left\langle -\gamma h_E \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \nu_h} + \tilde{u} - \tilde{u}_0 - \varepsilon \tilde{g}, \tilde{z} \right\rangle_E \right. \\
 &\quad - \left\langle -\gamma h_E \frac{\partial u}{\partial \nu} + u - u_0 - \varepsilon g, z \right\rangle_{\pi(E)} \\
 &\quad \left. - \gamma h_E \left\langle \varepsilon \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \nu_h} + \tilde{u} - \tilde{u}_0 - \varepsilon \tilde{g}, \frac{\partial \tilde{z}}{\partial \nu_h} \right\rangle_E \right]
 \end{aligned}$$