

# 滑らかな領域上の Robin 境界条件に対する有限要素法 と DG 法

千葉悠喜 齊藤宣一

東京大学大学院数理科学研究科

2018 年度応用数学合同研究集会

龍谷大学

2018 年 12 月 14 日

# 目次

1. はじめに
2. モデル方程式とスキーム
3. スキームの解析
4. 数値計算

# 1. はじめに

# はじめに

## 流体構造連成モデル (FSI モデル)

- ▶ 流体とその周りの構造の相互作用を含めて計算を行う。
- ▶ 血管のように壁が薄い円筒領域を液体が流れる問題では、壁の厚さ方向の値が同じと見なして計算を行う reduced-FSI モデルが用いられる。

→ 境界条件に接方向の微分が含まれる

## 滑らかな領域における数値計算

- ▶ 有限要素法では領域を多角形や多面体で近似して計算を行っている。

→ 問題の近似の仕方によっては元の問題と異なる問題の近似解を求めてしまうことがある (e.g. Babuška のパラドックス)

滑らかな領域における reduced-FSI モデルの数値計算では特に注意が必要

## 標準的な有限要素法

滑らかな領域に対する研究も盛ん

reduced-FSI モデルと関連する、動的境界条件についての研究も行われている。(Kovács & Lubich(2017))

DG 法等については、そのような研究はそこまで行われていない。

## 最終目標：reduced-FSI モデルへの DG 法の適用

滑らかな領域上の Robin 境界条件を持つ Poisson 方程式に対する、Nitsche 法, DG 法の適用とその解析

関連する先行研究

- ▶ Barrett & Elliott(1988)  
滑らかな領域上の Neumann, Robin 境界条件に対する標準的な有限要素法
- ▶ Juntunen & Stenberg(2008)  
多角形領域上の Neumann, Robin 境界条件に対する Nitsche 法

## 2 . モデル方程式とスキーム

## Poisson 方程式

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} + \frac{1}{\varepsilon} u = \frac{1}{\varepsilon} u_0 + g & \text{on } \Gamma \end{cases} \quad (1)$$

$\Omega \subset \mathbb{R}^2$ , 境界  $\Gamma = \partial\Omega$  は十分滑らか

$0 < \varepsilon < \infty$ ,  $\nu$ : 外向き単位法線ベクトル

$\varepsilon \rightarrow 0$ : Diriclet 境界条件,  $\varepsilon \rightarrow \infty$ : Neumann 境界条件

## 仮定 1 (cf. Kashiwabara-Oikawa-Zhou(2016))

局所座標系  $\{(U_r, y_r, \phi_r)\}_{r=1}^M$  が存在し、次を満たす.

- (1)  $\{U_r\}_{r=1}^M$  は  $\Gamma = \partial\Omega$  の開被覆である.
- (2)  $y_r = (y_{r1}, y_{r2})$  は元の座標  $x$  を回転させたものである.
- (3)  $\Delta_r := \{y_{r1} \in \mathbb{R} : |y_{r1}| < \alpha\}$  上で  $\phi_r$  は滑らかであり、そのグラフは  $\Gamma \cap U_r$  である.

ここで、 $\alpha$  は適当な正定数である.

ある  $h_0 > 0$  が存在して、任意の  $x \in \Gamma$  に対し、ある  $r$  が存在して  $B(x, h_0) \subset U_r$  となる.

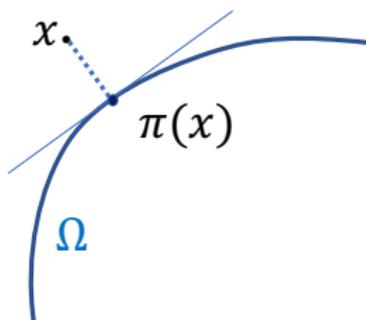
## 準備-領域

$\Gamma$  との符号付き距離関数  $d(x)$  を次のように定める.

$$d(x) = \begin{cases} -\text{dist}(x, \Gamma) & \text{if } x \in \Omega \\ \text{dist}(x, \Gamma) & \text{if } x \in \Omega^c \end{cases}$$

$\Gamma(\delta) := \{x \in \mathbb{R}^n : |d(x)| < \delta\}$  とする.  $\delta$  が十分小さいならば, 次を満たす直交射影  $\pi: \Gamma(\delta) \rightarrow \Gamma$  が存在する.

$$x = \pi(x) + d(x)\nu(\pi(x))$$



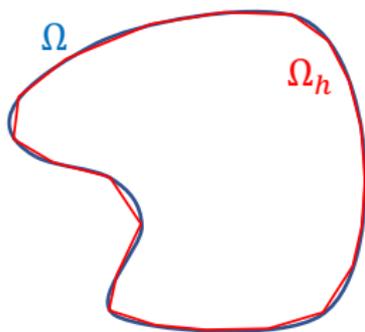
# 準備-領域

$\Omega_h$  : 多角形領域,  $\mathcal{T}_h : \Omega_h$  の正則な三角形分割,  $\mathcal{E}_h : \Gamma_h = \partial\Omega_h$  の分割

## 仮定 2 (cf. KOZ(2016))

- 1) メッシュサイズ  $h$  について  $h < \min\{h_0, 1\}$  となる.
- 2)  $r = 1, \dots, M$  に対し,  $\Gamma_h \cap U_r$  が関数  $\phi_{rh}$  のグラフにより表現される.
- 3)  $E \in \mathcal{E}_h$  の頂点がすべて  $\Gamma$  上にある.

$h$  を十分小さくすることで,  $\pi|_{\Gamma_h}$  は逆写像  $\pi^*(x) = x + t^*(x)\nu(x)$  を持ち,  $\|t^*\|_{0,\infty,\Gamma} \leq C_{0E}h^2$  となる.



補題 1 (Boundary-skin 評価 (KOZ(2016),  
Kashiwabara-Kemmochi(preprint)))

$C_{0E}h^2 \leq \delta \leq 2C_{0E}h^2$  に対し, 以下が成り立つ.

$$\left| \int_{\pi(E)} f d\gamma - \int_E f \circ \pi d\gamma_h \right| \leq Ch^2 \int_{\pi(E)} |f| d\gamma \quad f \in L^1(\pi(E)), E \in \mathcal{E}_h \quad (2)$$

$$\|f - f \circ \pi\|_{L^p(\Gamma_h)} \leq C\delta^{1-1/p} \|f\|_{W^{1,p}(\Gamma(\delta))} \quad f \in W^{1,p}(\Gamma(\delta)) \quad (3)$$

$$\|f\|_{L^p(\Gamma(\delta))} \leq C(\delta \|\nabla f\|_{L^p(\Gamma(\delta))} + \delta^{1/p} \|f\|_{L^p(\Gamma)}) \quad f \in W^{1,p}(\Gamma(\delta)) \quad (4)$$

$$\|f\|_{L^p(\Omega_h \setminus \Omega)} \leq C(\delta \|\nabla f\|_{L^p(\Omega_h \setminus \Omega)} + \delta^{1/p} \|f\|_{L^p(\Gamma_h)}) \quad f \in W^{1,p}(\Omega_h) \quad (5)$$

$$\|\nu_h - \nu \circ \pi\|_{L^\infty(\Gamma_h)} \leq Ch \quad (6)$$

$\nu_h : \Gamma_h$  の外向き単位法線ベクトル

# 準備-有限要素

滑らかな領域  $\tilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^d$  を  $\Omega, \Omega_h, \Gamma(C_{0E}h^2)$  を含むように選び,  
 $P: H^s(\Omega) \rightarrow H^s(\tilde{\Omega})$  を有界な拡張作用素とする.

## 仮定 3 (問題の仮定)

$\tilde{f} = Pf \in H^2(\tilde{\Omega})$  とし,  $u_0, g$  はそれぞれ  $\tilde{\Omega}$  上の関数  $\tilde{u}_0, \tilde{g} \in H^3(\tilde{\Omega})$  の  $\Gamma$  への制限であるとする. また, (1) の解  $u \in H^4(\Omega)$  とする.

## 有限要素空間

$$V_N := \{\chi \in C(\bar{\Omega}) : \chi|_T \in \mathcal{P}^1(T) \forall T \in \mathcal{T}_h\}$$

$$V_{DG} := \{\chi \in L^2(\Omega) : \chi|_T \in \mathcal{P}^1(T) \forall T \in \mathcal{T}_h\}$$

射影  $\Pi_N: H^2(\Omega_h) \rightarrow V_N$ ,  $\Pi_{DG}: H^2(\Omega_h) \rightarrow V_{DG}$  が存在し,  
 $T \in \mathcal{T}_h$ ,  $m = 0, 1, 2$ ,  $w \in H^2(T)$  に対し, 次を満たす.

$$|w - \Pi_N w|_{m,T} \leq Ch^{2-m} \|w\|_{2,T}, \quad |w - \Pi_{DG} w|_{m,T} \leq Ch^{2-m} \|w\|_{2,T}$$

$$\mathcal{E}_h^\circ = \{E: E \text{ は } K \in \mathcal{T}_h \text{ の辺, } E \not\subset \Gamma\}$$

$v \in H^s(\Omega_h) + V_{DG}$  と  $E \in \mathcal{E}_h^\circ$  に対し,  $\{\cdot\}$  および  $[\cdot]$  を以下のように定める.

$$\{v\} := \frac{1}{2}(v_1 + v_2), \quad [v] := v_1 n_1 + v_2 n_2,$$

$$\{\nabla v\} := \frac{1}{2}(\nabla v_1 + \nabla v_2), \quad [\nabla v] := \nabla v_1 \cdot n_1 + \nabla v_2 \cdot n_2$$

$E = K_1 \cap K_2$  を満たす相異なる  $K_1, K_2 \in \mathcal{T}_h$ ,  $v_i = v|_{K_i}$   
 $n_i: E$  上の  $K_i$  に関する外向き単位法線ベクトル

また,  $E \in \mathcal{E}_h$  に対し,  $\{\nabla v\} = \frac{\partial v}{\partial \nu_h}$  とする.

# スキーム

$$a_h^N(w, v) = (\nabla w, \nabla v)_{\Omega_h} + b_h(w, v)$$

$$b_h(w, v) = \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \left\{ -\frac{\gamma h_E}{\varepsilon + \gamma h_E} \left( \left\langle \frac{\partial w}{\partial \nu_h}, v \right\rangle_E + \left\langle w, \frac{\partial v}{\partial \nu_h} \right\rangle_E \right) \right. \\ \left. + \frac{1}{\varepsilon + \gamma h_E} \langle w, v \rangle_E - \frac{\varepsilon \gamma h_E}{\varepsilon + \gamma h_E} \left\langle \frac{\partial w}{\partial \nu_h}, \frac{\partial v}{\partial \nu_h} \right\rangle_E \right\}$$

$$a_h^{DG}(w, v) = (\nabla w, \nabla v)_{\Omega_h} + b_h(w, v) + J_h(w, v)$$

$$J_h(w, v) = \sum_{E \in \mathcal{E}_h^o} \left\{ -\langle \{\{\nabla w\}\}, [v] \rangle_E - \langle [w], \{\{\nabla v\}\} \rangle_E + \frac{1}{\gamma h_E} \langle [w], [v] \rangle_E \right\}$$

$h_E = \text{diam } E$ ,  $\gamma > 0$  : 十分小さな定数

## Nitsche 法

$$\begin{aligned} \text{Find } u_N \in V_N \text{ s.t.} \\ a_h^N(u_N, \chi) = l_h(\chi) \quad \forall \chi \in V_N \end{aligned} \quad (7)$$

## DG 法

$$\begin{aligned} \text{Find } u_{DG} \in V_{DG} \text{ s.t.} \\ a_h^{DG}(u_{DG}, \chi) = l_h(\chi) \quad \forall \chi \in V_N \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} l_h(v) = (\tilde{f}, v)_{\Omega_h} + \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \left\{ \frac{1}{\varepsilon + \gamma h_E} \langle \tilde{u}_0, v \rangle_E - \frac{\gamma h_E}{\varepsilon + \gamma h_E} \langle \tilde{u}_0, \frac{\partial v}{\partial \nu_h} \rangle_E \right. \\ \left. + \frac{\varepsilon}{\varepsilon + \gamma h_E} \langle \tilde{g}, v \rangle_E - \frac{\varepsilon \gamma h_E}{\varepsilon + \gamma h_E} \langle \tilde{g}, \frac{\partial v}{\partial \nu_h} \rangle_E \right\} \end{aligned}$$

以下、# は  $N$  または  $DG$  を表す。

### 3. スキームの解析

# 双線形式の性質

$$\|v\|_N^2 := \|\nabla v\|_{0,\Omega_h}^2 + \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \frac{\|v\|_{0,E}^2}{\varepsilon + h_E}, \quad \|v\|_{N,*}^2 := \|v\|_N^2 + \sum_{E \in \mathcal{E}_h} h_E \left\| \frac{\partial v}{\partial \nu_h} \right\|_{0,E}^2$$

$$\|v\|_{DG}^2 := \|v\|_N^2 + \sum_{E \in \mathcal{E}_h^\circ} \frac{\|[[v]]\|_{0,E}^2}{h_E}, \quad \|v\|_{DG,*}^2 := \|v\|_{DG}^2 + \sum_{E \in \mathcal{E}_h^\circ \cup \mathcal{E}_h} h_E \|\{\{\nabla v\}\}\|_{0,E}^2$$

## 補題 2 (連続性, 強圧性)

$$a_h^\#(w, v) \leq C \|w\|_{\#,*} \|v\|_{\#,*} \quad w, v \in H^s(\Omega_h) + V_\#, \quad (s > 3/2)$$

が成り立つ. さらに,  $\gamma$  が十分小さいならば,

$$a_h^\#(\chi, \chi) \geq C \|\chi\|_\#^2 \quad \chi \in V_\#$$

が成り立つ.

一般に,  $u \notin H^s(\Omega_h)$  であり,  $\tilde{u} = Pu$  としても,  $a_h^\#(\tilde{u}, v) \neq l_h(v)$  である.

## 補題 3

$u, u_N, u_{DG}$  をそれぞれ (1), (7), (8) の解とする. このとき,  $\gamma$  が十分小さいならば, 以下が成り立つ.

$$\|\tilde{u} - u_{\#}\|_{\#,*} \leq C \left[ \inf_{\xi \in V_{\#}} \|\tilde{u} - \xi\|_{\#,*} + \sup_{\chi \in V_{\#}} \frac{|a_h^{\#}(\tilde{u}, \chi) - l_h(\chi)|}{\|\chi\|_{\#}} \right] \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \|\tilde{u} - u_{\#}\|_{0,\Omega_h} \leq C & \left[ \|\tilde{u} - u_{\#}\|_{0,\Omega_h \setminus \Omega} + h \|\tilde{u} - u_{\#}\|_{\#,*} \right. \\ & + \sup_{z \in H^2(\Omega)} \|z\|_{2,\Omega}^{-1} \left( \|\tilde{z} - \Pi_{\#}\tilde{z}\|_{\#,*} \|\tilde{u} - u_{\#}\|_{\#,*} \right. \\ & \left. \left. + \left| a_h^{\#}(\tilde{u}, \Pi_{\#}\tilde{z}) - l_h(\Pi_{\#}\tilde{z}) \right| \right) \right] \quad (10) \end{aligned}$$

ただし,  $\tilde{u} = Pu$ ,  $\tilde{z} = Pz$  である.

## 略証. Step 1

$\xi \in V_{\#}$  とし,  $\chi = u_{\#} - \xi$  とする. 双線形形式の性質より,

$$\begin{aligned} \|\chi\|_h^2 &\leq C a_h^{\#}(\chi, \chi) = C(l_h(\chi) - a_h^{\#}(\xi, \chi)) \\ &= C(a_h^{\#}(\tilde{u} - \xi, \chi) - a_h^{\#}(\tilde{u}, \chi) + l_h(\chi)) \\ &\leq C \|\tilde{u} - \xi\|_{\#, *}\|\chi\|_{\#} + \left| a_h^{\#}(\tilde{u}, \chi) - l_h(\chi) \right| \end{aligned}$$

多項式に対する逆不等式と三角不等式より, (9) が成り立つ.

$w \in H^s(\Omega_h) + V_{\#}$  と  $v \in H^2(\Omega_h)$  に対し, 部分積分より,

$$(w, -\Delta v)_{\Omega_h} = a_h^{\#}(w, v) - \sum_{E \in E_h} \left[ \frac{\varepsilon}{\varepsilon + \gamma h_E} \left\langle \frac{\partial v}{\partial \nu_h} + \frac{v}{\varepsilon}, (1 - \gamma h_E \frac{\partial}{\partial \nu_h}) w \right\rangle_E \right] \quad (11)$$

となる.

## 略証. Step 2

$\eta \in L^2(\Omega_h)$  とし,  $\tilde{\eta} \in L^2(\tilde{\Omega})$  を 0 拡張とする.  $z \in H^2(\Omega)$  を

$$\begin{cases} -\Delta z = \tilde{\eta} & \text{in } \Omega \\ \frac{\partial z}{\partial \nu} + z/\varepsilon = 0 & \text{on } \Gamma \end{cases}$$

の解とする. (11) より,

$$\begin{aligned} (\tilde{u} - u_{\#}, \eta)_{\Omega_h} &= a_h^{\#}(\tilde{u} - u_{\#}, \tilde{z} - \Pi_{\#}\tilde{z}) \\ &\quad + a_h^{\#}(\tilde{u}, \Pi_{\#}\tilde{z}) - l_h(\Pi_{\#}\tilde{z}) + (\tilde{u} - u_{\#}, \eta + \Delta\tilde{z})_{\Omega_h \setminus \Omega} \\ &\quad - \sum_{E \in E_h} \left[ \frac{\varepsilon}{\varepsilon + \gamma h_E} \left\langle \frac{\partial \tilde{z}}{\partial \nu_h} + \frac{\tilde{z}}{\varepsilon}, (1 - \gamma h_E \frac{\partial}{\partial \nu_h})(\tilde{u} - u_{\#}) \right\rangle_E \right] \end{aligned}$$

Boundary-skin 評価より, 3 行目を  $h \|\tilde{u} - u_{\#}\|_{\#, *}$   $\|\eta\|_{L^2(\Omega)}$  で上から評価でき, 他の評価と合わせて (10) が得られる.

## 定理 1

補題 3 の仮定のもとで以下が成り立つ.

$$\|\tilde{u} - u_{\#}\|_{\#, *}\leq Ch(\|u\|_{3, \Omega} + \|\tilde{u}_0\|_{1, \tilde{\Omega}} + \|\tilde{g}\|_{1, \tilde{\Omega}})$$

$$\|\tilde{u} - u_{\#}\|_{0, \Omega_h}\leq Ch^2(\|u\|_{4, \Omega} + \|\tilde{u}_0\|_{3, \tilde{\Omega}} + \|\tilde{g}\|_{3, \tilde{\Omega}})$$

ただし,  $\tilde{u} = Pu$  である.

$P\Delta u = \Delta Pu$  となるならば,  $\|\tilde{u} - u_{\#}\|_{\#, *}\leq Ch(\|u\|_{2, \Omega} + \dots)$  と評価できる.

## 略証. Step 1

$\left| a_h^\#(\tilde{u}, \chi) - l_h(\chi) \right|$  および  $\left| a_h^\#(\tilde{u}, \Pi_h \tilde{z}) - l_h(\Pi_h \tilde{z}) \right|$  を評価すればよい。  
 (11) より,

$$\begin{aligned}
 \left| a_h^\#(\tilde{u}, \chi) - l_h(\chi) \right| &\leq \|\tilde{f} + \Delta \tilde{u}\|_{0, \Omega_h \setminus \Omega} \|\chi\|_{0, \Omega_h} \\
 &\quad + \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \frac{\varepsilon}{\varepsilon + \gamma h_E} \left| \left\langle \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \nu_h} + \frac{\tilde{u} - \tilde{u}_0}{\varepsilon} - \tilde{g}, \chi - \gamma h_E \frac{\partial \chi}{\partial \nu_h} \right\rangle_E \right|
 \end{aligned}$$

となる. Boundary-skin 評価より求めたい評価が得られる.

## 略証. Step 2

$$a^N(w, v) = (\nabla w, \nabla v)_\Omega + b(w, v)$$

$$b(w, v) = \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \left\{ -\frac{\gamma h_E}{\varepsilon + \gamma h_E} \left( \left\langle \frac{\partial w}{\partial \nu}, v \right\rangle_{\pi(E)} + \left\langle w, \frac{\partial v}{\partial \nu} \right\rangle_{\pi(E)} \right) + \frac{1}{\varepsilon + \gamma h_E} \langle w, v \rangle_{\pi(E)} - \frac{\varepsilon \gamma h_E}{\varepsilon + \gamma h_E} \left\langle \frac{\partial w}{\partial \nu}, \frac{\partial v}{\partial \nu} \right\rangle_{\pi(E)} \right\}$$

$$a^{DG}(w, v) = (\nabla w, \nabla v)_\Omega + b(w, v) + J_h(w, v)$$

$$l(v) = (f, v)_\Omega + \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \left\{ \frac{1}{\varepsilon + \gamma h_E} \langle \tilde{u}_0, v \rangle_{\pi(E)} - \frac{\gamma h_E}{\varepsilon + \gamma h_E} \langle \tilde{u}_0, \frac{\partial v}{\partial \nu} \rangle_{\pi(E)} + \frac{\varepsilon}{\varepsilon + \gamma h_E} \langle \tilde{g}, v \rangle_{\pi(E)} - \frac{\varepsilon \gamma h_E}{\varepsilon + \gamma h_E} \langle \tilde{g}, \frac{\partial v}{\partial \nu} \rangle_{\pi(E)} \right\}$$

とすると,  $v \in H^s(\Omega) + V_h$  に対し,  $a(u, v) = l(v)$  が成り立つ.

## 略証. Step 3

これより,

$$\begin{aligned}
 a_h^\#(\tilde{u}, \Pi_\# \tilde{z}) - l_h(\Pi_\# \tilde{z}) &= (a^\#(\tilde{u}, \Pi_\# \tilde{z} - \tilde{z}) - l_h(\Pi_\# \tilde{z} - \tilde{z})) \\
 &\quad + (a_h^\#(\tilde{u}, \tilde{z}) - a(u, z) + l(z) - l_h(\tilde{z})) = I_1 + I_2
 \end{aligned}$$

となり,  $I_1$  は補間誤差評価と合わせて求めたい評価が得られる.

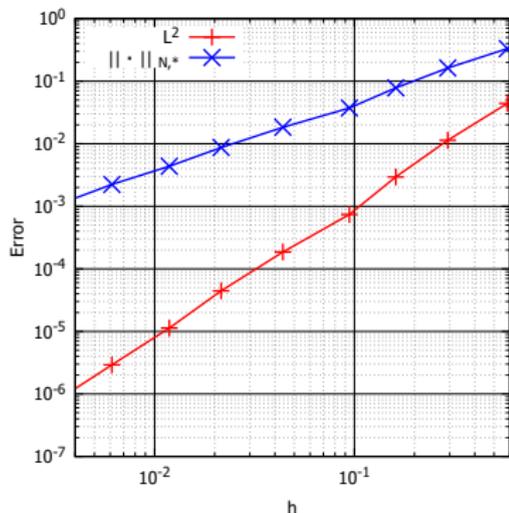
$$\begin{aligned}
 I_2 &= \int_{\Omega_h \setminus \Omega} (\nabla \tilde{u} \cdot \nabla \tilde{z} - \tilde{f} \tilde{z}) dx - \int_{\Omega \setminus \Omega_h} (\nabla u \cdot \nabla z - fz) dx \\
 &\quad + \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \frac{1}{\varepsilon + \gamma h_E} \left[ \left\langle -\gamma h_E \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \nu_h} + \tilde{u} - \tilde{u}_0 - \varepsilon \tilde{g}, \tilde{z} \right\rangle_E \right. \\
 &\quad \left. - \left\langle -\gamma h_E \frac{\partial u}{\partial \nu} + u - u_0 - \varepsilon g, z \right\rangle_{\pi(E)} - \gamma h_E \left\langle \varepsilon \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \nu_h} + \tilde{u} - \tilde{u}_0 - \varepsilon \tilde{g}, \frac{\partial \tilde{z}}{\partial \nu_h} \right\rangle_E \right]
 \end{aligned}$$

となり, Boundary-skin 評価より求めたい評価が得られる.

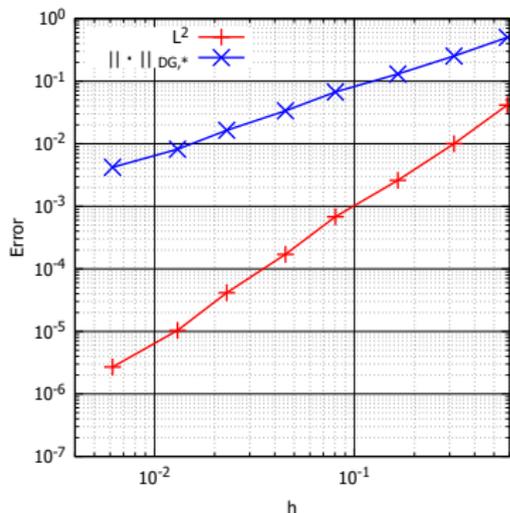
## 4 . 数値計算

# 数値計算

$\Omega = \{|x| < 1\} \subset \mathbb{R}^2$ ,  $\Omega_h$ : 正  $n$  角形, 厳密解  $u(x, y) = \exp(-x^2 - y^2)$   
Nitsche 法と DG 法の近似解を計算し, 厳密解との誤差を計算した.



(a) Nitsche 法

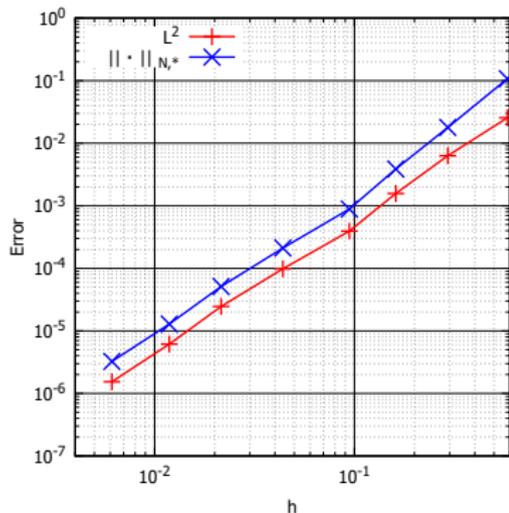


(b) DG 法

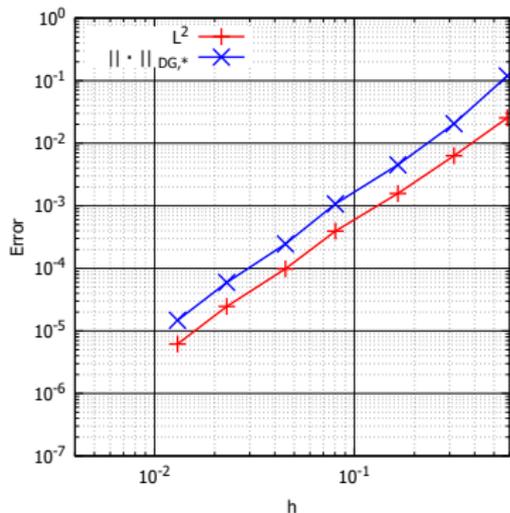
エネルギーノルムが  $O(h)$ ,  $L^2$  ノルムが  $O(h^2)$  となっている.

# 数値計算

同様の問題を，P2 要素を用いて計算を行った。



(a) Nitsche 法



(b) DG 法

エネルギーノルム， $L^2$  ノルムどちらも  $O(h^2)$  となっている。

滑らかな領域上の Robin 境界条件を持つ Poisson 方程式に対する Nitsche 法および DG 法について、エネルギーノルムと  $L^2$  ノルムによる誤差評価を得た。

## 今後の課題

- ▶ 一般化 Robin 境界条件

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} - \Delta_{\Gamma} u + \frac{1}{\varepsilon} u = \frac{1}{\varepsilon} u_0 + g & \text{on } \Gamma \end{cases}$$

や、その時間発展である動的境界条件に対して、本手法の適用