

# DG 法と HDG 法の比較

千葉悠喜

東京大学大学院数理科学研究科 博士 3 年  
<http://ychiba.sakura.ne.jp/>

応用数学フレッシュマンセミナー 2019  
京都大学  
2019 年 11 月 9 日

1. 数値解析とは
2. DG 法と HDG 法 (Poisson 方程式)
  - DG 法
  - HDG 法
3. 数値計算での比較
  - 誤差評価
  - 計算時間
4. 自分の研究

# 1. 数値解析とは

## 数値解析

解くのが“困難”な問題に対し、その近似解を求める方法を導出し、その“妥当性”を検証する分野.

問題 (PDE など)

困難  
→

厳密解

# 数値解析

## 数値解析

解くのが“困難”な問題に対し、その近似解を求める方法を導出し、その“妥当性”を検証する分野.

問題 (PDE など)

↓ 離散化など

近似問題

困難

→

→

(比較的) 容易

厳密解

↑ 収束, 誤差評価など

近似解

PDE の数値解析において重要なのは次の点

## 可解性

近似問題の解は存在するか？ 現実的に解くことができるか？

## 収束性

厳密解  $u$  と近似解  $u_N$  が  $N \rightarrow \infty$  としたとき  $u_N \rightarrow u$  となっているか？  
その誤差  $\|u - u_N\|$  は  $N$  などを用いてどう評価されるか？

## 構造保存

厳密解が持っている性質と同様の性質を近似解でも保っているか？

# 偏微分方程式の数値計算手法

## 差分法 (Finite Difference Method)

領域を格子状に切り，微分を格子点上の値を用いた差分に置き換えて計算を行う。

## 有限要素法 (Finite Element Method)

領域を三角形などの小さな要素に分割し，各要素上で多項式となるような関数を用いて近似を行う。

## 有限体積法 (Finite Volume Method)

領域を小さな要素に分割し，保存量に注目して区分的定数関数を用いて近似を行う。

## 2 . DG 法と HDG 法 (Poisson 方程式)

## 有限要素法 (Finite Element Method)

領域を三角形などの小さな要素に分割し、各要素上で多項式となるような関数を用いて近似を行う。

## 不連続 Galerkin (Discontinuous Galerkin) 法

各要素上で多項式となる不連続関数を用い、要素間の連続性を数値流速と呼ばれる値を用いて制御して計算する数値解法。  
問題の自由度が比較的大きくなる。

## ハイブリッド型不連続 Galerkin (Hybridized Discontinuous Galerkin) 法

各要素上で多項式となる不連続関数と、各要素間上の数値トレースを用いて計算する数値解法。  
高い次数の多項式を用いた際、DG 法とくらべて問題の自由度が小さい。  
(static condensation)

# Poisson 方程式

## Poisson 方程式

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases} \quad (1)$$

$\Omega \subset \mathbb{R}^2$  : 多角形領域

$q = -\nabla u$  とすることで以下のようになる.

$$\begin{cases} q + \nabla u = 0 & \text{in } \Omega & (2a) \\ \nabla \cdot q = f & \text{in } \Omega & (2b) \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega & (2c) \end{cases}$$

# Poisson 方程式

$\{\mathcal{T}_h\}_h$  :  $\Omega$  の正則な三角形分割,  $\partial\mathcal{T}_h := \{\partial K : K \in \mathcal{T}_h\}$

$\mathcal{F}_h := \{F : F \text{ は } K \in \mathcal{T}_h \text{ の辺}\}$  : 辺全体の集合

$\mathcal{F}_h^i := \{F \in \mathcal{F}_h : F \not\subset \Gamma_h\}$  : 内部の辺

$\mathcal{F}_h^\partial := \{F \in \mathcal{F}_h : F \subset \Gamma_h\}$  : 境界部分の辺,  $\partial\Omega = \bigcup_{F \in \mathcal{F}_h^\partial} F$  と分割できる.

$\Gamma := \bigcup_{F \in \mathcal{F}_h} F$  とする. 各  $F \in \mathcal{F}_h^\partial$  に対し,  $\{\cdot\}$  と  $[\cdot]$  を次のように定める.

$$\{v\}_F := \frac{1}{2}(v_1 + v_2), \quad [v]_F := v_1 n_1 + v_2 n_2,$$

$$\{\nabla v\}_F := \frac{1}{2}(\nabla v_1 + \nabla v_2), \quad [\nabla v]_F := \nabla v_1 \cdot n_1 + \nabla v_2 \cdot n_2.$$

ここで,  $F = \partial K_1 \cap \partial K_2$  を満たす相異なる  $K_1, K_2 \in \mathcal{T}_h$  が存在し,  $v_i = v|_{K_i}$ ,  $n_i$  は  $F$  上の  $K_i$  に関する外向き単位法線ベクトル.

# Poisson 方程式

(2a) にベクトル値テスト関数  $v$  をかけて  $K \in \mathcal{T}_h$  上で積分する.

$$(q, v)_K - (u, \nabla \cdot v)_K + \langle u, v \cdot n \rangle_{\partial K} = 0$$

同様に, (2b) にスカラー値テスト関数  $w$  をかけて  $K \in \mathcal{T}_h$  上で積分する.

$$-(q, \nabla w)_K + \langle q \cdot n, w \rangle_{\partial K} = (f, w)_K$$

# Poisson 方程式

(2a) にベクトル値テスト関数  $v$  をかけて  $K \in \mathcal{T}_h$  上で積分する.

$$(q, v)_K - (u, \nabla \cdot v)_K + \langle u, v \cdot n \rangle_{\partial K} = 0$$

同様に, (2b) にスカラー値テスト関数  $w$  をかけて  $K \in \mathcal{T}_h$  上で積分する.

$$-(q, \nabla w)_K + \langle q \cdot n, w \rangle_{\partial K} = (f, w)_K$$

$\partial K$  上の積分における  $u, q$  を,  $\partial K$  上で定義された関数  $\hat{u}, \hat{q}$  で置き換える.

$$\begin{cases} (q, v)_K - (u, \nabla \cdot v)_K + \langle \hat{u}, v \cdot n \rangle_{\partial K} = 0 & (3a) \\ -(q, \nabla w)_K + \langle \hat{q} \cdot n, w \rangle_{\partial K} = (f, w)_K & (3b) \end{cases}$$

$\hat{u}, \hat{q}$  の定め方によってスキームが変わる.

## 有限要素空間

$$W_h := \{w_h \in L^2(\Omega_h) : w_h|_K \in W_h(K) \forall K \in \mathcal{T}_h\}$$

$$V_h := \{v_h \in L^2(\Omega_h)^2 : v_h|_K \in V_h(K) \forall K \in \mathcal{T}_h\}$$

$$M_h := \{\mu_h \in L^2(\mathcal{F}_h) : \mu_h|_F \in M_h(F) \forall F \in \mathcal{F}_h\}$$

ただし, 各  $K \in \mathcal{T}_h$  と  $F \in \mathcal{F}_h$  に対し,

$$W_h(K) := \{w_h \in L^2(K) : w_h \in \mathcal{P}^k(K)\}$$

$$V_h(K) := \{v_h \in L^2(K)^2 : v_h \in \mathcal{P}^l(K)^2\}$$

$$M_h(F) := \{\mu_h \in L^2(F) : \mu_h \in \mathcal{P}^m(F)\}$$

$$M_h(\partial K) := \{\mu_h \in L^2(\partial K) : \mu_h|_F \in M_h(F) \forall F \in \mathcal{F}_h, F \subset \partial K\}.$$

$$\begin{cases} (q, v)_K - (u, \nabla \cdot v)_K + \langle \hat{u}, v \cdot n \rangle_{\partial K} = 0 & (3a) \\ -(q, \nabla w)_K + \langle \hat{q} \cdot n, w \rangle_{\partial K} = (f, w)_K & (3b) \end{cases}$$

## DG 法

数値流速  $\hat{u}(u)$ ,  $\hat{q}(u, q)$  を適切に定め、それを用いて計算を行う。

数値流速  $\hat{u}$ ,  $\hat{q}$  の定め方によって色々なスキームがある。

例. SIPG, LDG

数値流速が満たすべき条件の例として以下のものがある。

- ▶  $u$  が境界条件を満たす十分滑らかな関数ならば,  
各  $\partial K$  上で  $\hat{u}(u) = u$ ,  $\hat{q}(u, \nabla u) = u$
- ▶  $\hat{u}$ ,  $\hat{q}$  は各  $F \in \mathcal{F}_h^i$  上で一価 ( $\hat{u}$ ,  $\hat{q}$  は  $\Gamma$  上の関数)



## SIPG 法

Find  $u_h \in W_h$  s.t.

$$a_{DG}(u_h, w_h) = (f, w_h) \quad \forall w_h \in W_h \quad (5)$$

$$a_{DG}(v, w) = (\nabla v, \nabla w)_{\mathcal{T}_h} - (\{\{\nabla v\}\}, [w])_{\mathcal{F}_h} \\ - ([v], \{\{\nabla w\}\})_{\mathcal{F}_h} + \tau([v], [w])_{\mathcal{F}_h}$$

 $\tau$  : 要素の大きさ等に依存する定数

適当な仮定の下で解は一意に存在し、誤差評価が成り立つ。

$$\begin{cases} (q, v)_K - (u, \nabla \cdot v)_K + \langle \hat{u}, v \cdot n \rangle_{\partial K} = 0 & (3a) \\ -(q, \nabla w)_K + \langle \hat{q} \cdot n, w \rangle_{\partial K} = (f, w)_K & (3b) \end{cases}$$

## HDG 法

数値トレース  $\hat{u}$  を  $\Gamma$  上で定義された未知関数とし,  $\hat{q}$  を  $u, q, \hat{u}$  を用いて定める.

(3) に追加する方程式として,  $\mu$  をテスト関数とし, 以下を考える.

$$\langle [[\hat{q}]], \mu \rangle_F = 0 \quad \forall F \in \mathcal{F}_h^i \quad (7)$$



## Poisson 方程式-HDG 法

仮に  $\hat{u} \in L^2(\partial K)$  が与えられたとし,  $Q_{\hat{u}} \in V_h(K)$ ,  $U_{\hat{u}} \in W_h(K)$  を次で定める.

$$\left\{ \begin{array}{l} (Q_{\hat{u}}, v_h)_K - (U_{\hat{u}}, \nabla \cdot v_h)_K = -\langle \hat{u}_h, v \cdot n \rangle_{\partial K} \\ \quad \forall v_h \in V_h(K) \\ -(Q_{\hat{u}}, \nabla w_h)_K + \langle Q_{\hat{u}} \cdot n + \tau U_{\hat{u}}, w_h \rangle_{\partial K} = \langle \tau \hat{u}, w_h \rangle_{\partial K} \\ \quad \forall w_h \in W_h(K) \end{array} \right. \quad (8)$$

同様に,  $f \in L^2(K)$  が与えられたとし,  $Q_f \in V_h(K)$ ,  $U_f \in W_h(K)$  を次で定める.

$$\left\{ \begin{array}{l} (Q_f, v_h)_K - (U_f, \nabla \cdot v_h)_K = 0 \\ \quad \forall v_h \in V_h(K) \\ -(Q_f, \nabla w_h)_K + \langle Q_f \cdot n + \tau U_f, w_h \rangle_{\partial K} = (f, w_h)_K \\ \quad \forall w_h \in W_h(K) \end{array} \right. \quad (9)$$

$\hat{u}_h \in M_h$  が (H) の第 3,4 式を満たすならば,  
 $q_h = Q_{\hat{u}_h} + Q_f$ ,  $u_h = U_{\hat{u}_h} + U_f$  とすれば  $(q_h, u_h, \hat{u}_h)$  が (H) の解となる.

## Static condensation

Find  $\hat{u}_h \in M_h(0)$  s.t.

$$a_{HDG}(\hat{u}_h, \mu_h) = l_{HDG}(\mu_h) \quad \forall \mu_h \in M_h(0) \quad (10)$$

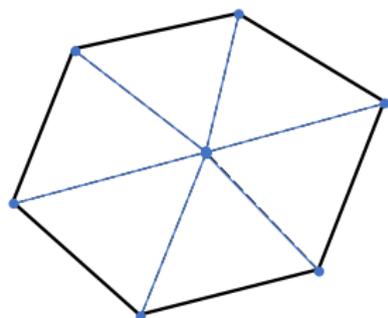
$$M_h(0) = \{\mu_h \in M_h : \mu_h = 0 \text{ on } \partial\Omega\}$$

$$a_{HDG}(\lambda, \mu) = -\langle [[\hat{Q}_\lambda]], \mu \rangle_{\mathcal{F}_h}$$

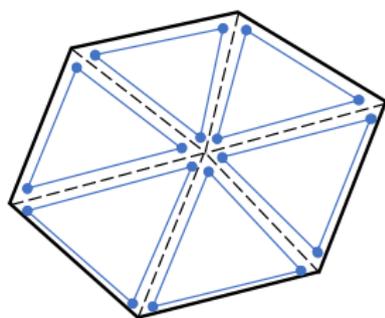
$$l_{HDG}(\mu) = \langle [[\hat{Q}_f]], \mu \rangle_{\mathcal{F}_h}$$

$Q_{\hat{u}_h}$ ,  $Q_f$ ,  $U_{\hat{u}_h}$ ,  $U_f$  の計算は各  $K \in \mathcal{T}_h$  で独立に計算できるので連立一次方程式を解くコストが低い.

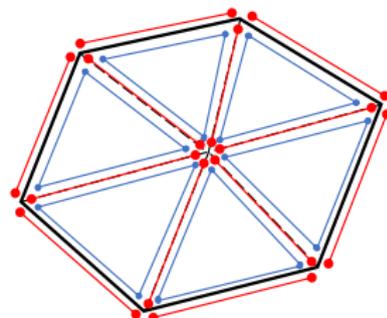
# Poisson 方程式-自由度の比較



FEM



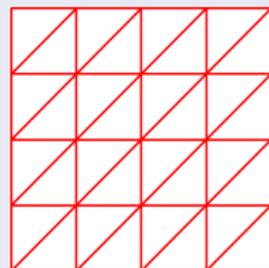
DG



HDG

## 自由度の比較

	FEM	DG	HDG
P1	頂点 (25)	$3 \times$ 要素 (96)	$2 \times$ 辺 (112)
P2	頂点 + 辺 (81)	$6 \times$ 要素 (192)	$3 \times$ 辺 (168)
P3	頂点 + $2 \times$ 辺 + 要素 (169)	$10 \times$ 要素 (320)	$4 \times$ 辺 (224)



### 3. 数値計算での比較

# 数値計算での比較

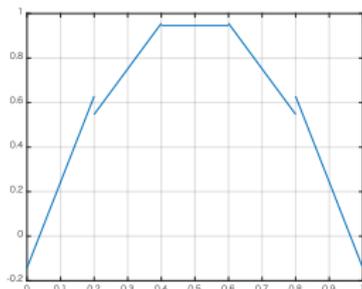
## 問題-1 次元 Poisson 方程式

$$\begin{cases} -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \pi^2 \sin(\pi x) & \text{in } \Omega = (0, 1) \\ u(x) = 0 & \text{at } x = 0, 1 \end{cases} \quad (11)$$

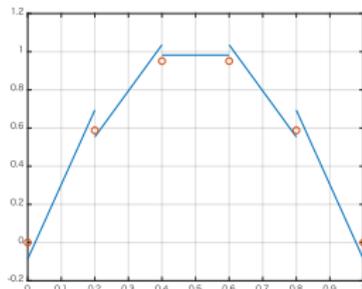
厳密解:  $u(x) = \sin(\pi x)$

SIPG 法および static condensation を用いた HDG 法を MATLAB で実装し、比較を行う。

DG 法



HDG 法



# 誤差評価

多項式の次数, 分割数  $N$  を変えて  $L^2$  誤差評価を行った. ( $\tau = N/2$ )

手法 次数	DG 法		HDG 法		
	$k = 1$	$k = 2$	$k = 1, l = 1$	$k = 1, l = 0$	$k = 2, l = 2$
N=10	7.87e-03	9.90e-04	3.31e-03	6.38e-02	1.97e-04
N=20	1.65e-03	1.37e-04	7.06e-04	1.60e-02	2.01e-05
N=40	4.02e-04	1.77e-05	1.68e-04	4.00e-03	2.34e-06
N=80	9.98e-05	2.25e-06	4.14e-05	1.00e-03	2.88e-07
N=160	2.49e-05	2.82e-07	1.03e-05	2.50e-04	3.58e-08

$k = 1$  では  $O(h^2)$ ,  $k = 2$  では  $O(h^3)$  程度となっている.

$l = k$  のときは HDG 法の方が誤差が小さい.

一方,  $k = 1, l = 0$  のときは HDG 法の方が誤差が大きい.

# 誤差評価

多項式の次数, 分割数  $N$  を変えて  $H^1$  セミノルム誤差評価を行った.  
( $\tau = N/2$ )

手法 次数	DG 法		HDG 法		
	$k = 1$	$k = 2$	$k = 1, l = 1$	$k = 1, l = 0$	$k = 2, l = 2$
N=10	2.22e-01	3.25e-02	2.14e-01	2.14e-01	1.55e-02
N=20	1.02e-01	8.86e-02	1.02e-01	1.02e-01	3.16e-03
N=40	5.06e-02	2.29e-03	5.06e-02	5.06e-02	7.38e-04
N=80	2.52e-02	5.79e-04	2.52e-02	2.52e-02	1.81e-04
N=160	1.25e-03	1.46e-04	1.26e-03	1.26e-03	4.51e-05

$k = 1$  では  $O(h^1)$ ,  $k = 2$  では  $O(h^2)$  程度となっている.

$k = 1$  のときは誤差はどちらも同程度である.

一方,  $k = 2, l = 2$  のときは HDG 法の方が誤差が小さい.

# 計算時間

多項式の次数, 分割数  $N$  を変えて計算時間の比較を行った. ( $\tau = N/2$ )

手法 次数	DG 法		HDG 法		
	$k = 1$	$k = 2$	$k = 1, l = 1$	$k = 1, l = 0$	$k = 2, l = 2$
N=100	0.0975	0.1579	0.0947	0.0672	0.2066
N=200	0.1209	0.2582	0.1768	0.1205	0.3359
N=400	0.2183	0.3873	0.2922	0.1691	0.6332
N=800	0.4459	0.7803	0.6072	0.3383	1.1798
N=1600	0.8916	1.6705	1.2340	0.7432	2.4002

$l = k$  のときは HDG 法の方が計算時間が長い.

一方,  $k = 1, l = 0$  のときは HDG 法の方が計算時間が短い.

# 計算時間

数値計算は大まかに

(i)  $A, b$  の生成 (ii)  $Ax = b$  を解く (iii)  $x$  の後処理

の3つに分けられる.  $N = 800$  におけるそれぞれの計算時間は以下のようになった.

手法	DG 法		HDG 法		
	$k = 1$	$k = 2$	$k = 1, l = 1$	$k = 1, l = 0$	$k = 2, l = 2$
(i)	0.4447	0.7787	0.6026	0.3347	1.1759
(ii)	2.06e-4	4.11e-4	6.12e-5	3.78e-5	3.46e-5
(iii)	2.67e-4	2.84e-4	2.50e-3	1.66e-3	1.87e-3

(ii) の連立一次方程式を解くのは HDG の方が速いが, 全体の計算時間は (i) の行列生成の影響が大きいことがわかる.

(i) で多くの時間を占めているのは、小区間における数値積分である。今回の実装では各小区間で以下の回数の積分を行っている。

## DG 法

- ▶  $(\nabla u_h, \nabla w_h) : \dim W_h \times \dim W_h$  回
- ▶  $(f, w_h) : \dim W_h$  回

## HDG 法

- ▶  $(q_h, v_h) : \dim V_h \times \dim V_h$  回
- ▶  $(u_h, \nabla \cdot v_h) : \dim W_h \times \dim V_h$  回
- ▶  $(f, w_h) : \dim W_h$  回

内部実装：基底ごとに  $G(x) = q_h(x) \cdot v_h(x)$  などとし、Simpson 則で計算  
実装方法によって計算時間が変わりうる。

## 4 . 自分の研究

## 滑らかな領域上の PDE に対する数値計算

滑らかな領域  $\Omega$  を多角形領域  $\Omega_h$  で近似して計算を行うことが多い。

$\Omega_h \rightarrow \Omega$  であっても、近似解が別の問題の解に収束してしまうことがある。

(例. Babuška のパラドックス)

## 研究内容

滑らかな領域上の Poisson 方程式に対する DG 法

境界条件

- ▶ Robin 境界条件
- ▶ 一般化 Robin 境界条件 (Laplace-Beltrami 作用素  $\Delta_{\partial\Omega}$  を含む境界条件)

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} + u - \Delta_{\partial\Omega} u = g$$