一般化 Robin 境界条件に対する不連続 Galerkin 法

千葉悠喜

東京大学大学院数理科学研究科

日本応用数理学会 2019 年年会
東京大学
2019 年 9 月 3 日

目次

1. はじめに

2. 領域の多角形近似

3. モデル方程式とスキーム

4. スキームの解析と誤差評価

5. 数値計算

1．はじめに

はじめに

複雑な境界条件を持つ方程式 $\to$ 現実問題への応用に需要

曲線上の Laplace-Beltrami 作用素 Δ_Γ を含む境界条件

動的境界条件

$$\mu \frac{\partial u}{\partial t} = -\alpha u + \beta \Delta_\Gamma u - \frac{\partial u}{\partial \nu} + g$$

一般化 Robin 境界条件

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} + \alpha u - \beta \Delta_\Gamma u = g$$

$\to$reduced-FSI モデル，Cahn-Hilliard 方程式

はじめに

動的境界条件や一般化 Robin 境界条件に関する過去の研究

有限要素法 ：Kashiwabara et al. (2015), Kovács & Lubich (2017)
不連続 Galerkin(DG) 法 ：Antonietti et al. (2016)

Kovács & Lubich では滑らかな領域上の方程式を扱っている一方，
Antonietti et al. では矩形領域のみを扱っている．
$\rightarrow$ 現実の問題への応用が難しい一因

滑らかな領域上の一般化 Robin 境界条件を持つ Poisson 方程式に対し，DG 法の適用とその解析

2．領域の多角形近似

cf. Elliott & Ranner (2013)

領域の多角形近似

$\Omega \subset \mathbb{R}^2$，境界 $\Gamma = \partial\Omega$ は十分滑らか
$\mathcal{T}_h$: Ω_h の正則，準一様な三角形分割，$\Omega_h = \mathrm{int}(\cup_{K\in\mathcal{T}_h}\overline{K})$，$\Gamma_h = \partial\Omega_h$
$\mathcal{E}_h = \{E\colon E$ は $K \in \mathcal{T}_h$の辺, $E \subset \Gamma_h\}$: Γ_h の分割
$\mathcal{I}_h = \{E\colon E$ は $K \in \mathcal{T}_h$の辺, $E \not\subset \Gamma_h\}$, $\mathcal{R}_h = \{R\colon R$ は $E \in \mathcal{E}_h$の端点 $\}$

仮定 1

- $E \in \mathcal{E}_h$ の頂点がすべて Γ 上にある
- Γ_h に各 $K \in \mathcal{T}_h$ の辺が高々 1 つしか含まれない

領域の近似

Γ との符号付き距離関数 $d(x)$ を次のように定める.

$$d(x) = \begin{cases} -\mathrm{dist}(x, \Gamma) & \text{if } x \in \Omega \\ \mathrm{dist}(x, \Gamma) & \text{if } x \in \Omega^c \end{cases}$$

$\Gamma(\delta) := \{x \in \mathbb{R}^d \colon |d(x)| < \delta\}$ とする．δ が十分小さいならば，次を満たす直交射影 $p\colon \Gamma(\delta) \to \Gamma$ が存在する.

$$x = p(x) + d(x)\nu(p(x))$$

このとき，Ω，Ω_h の外向き法線ベクトル ν，ν_h に対し，

$$\|\nu_h - \nu \circ p\|_{L^\infty(\Gamma_h)} \le Ch \tag{1}$$

が成り立つ.

領域の近似

$G_h\colon \Omega_h \to \Omega$ を p を用いて Elliott & Ranner (2013) の §4 のように定める.

G_h の性質

- $G_h|_{\Gamma_h} = p$
- $G_h|_K \in C^2(K)$, K が Γ_h 上に頂点を持たないならば, $G_h|_K = \mathrm{id}_K$
- $\|DG_h^{\mathrm{T}}|_K - I\|_{L^\infty(K)} \le Ch$, $\|\left|\det DG_h^{\mathrm{T}}|_K\right| - 1\|_{L^\infty(K)} \le Ch$

Γ および Γ_h 上の接方向の勾配 ∇_Γ, ∇_{Γ_h} を以下のように定める.

$$\nabla_\Gamma u = \nabla u - (\nabla u \cdot \nu)\nu = P\nabla u,\ \nabla_{\Gamma_h} u = \nabla u - (\nabla u \cdot \nu_h)\nu_h = P_h\nabla u$$

$\mathcal{H} = (\frac{\partial^2 d}{\partial x_i \partial x_j})_{i,j}$, $d\Gamma = \mu_h d\Gamma_h$, $Q_h = \frac{1}{\mu_h}(I - d\mathcal{H})PP_hP(I - d\mathcal{H})$ とすると以下が成り立つ.

$$|\mu_h Q_h - I| \le Ch^2,\ |\mu_h - 1| \le Ch^2$$

領域の近似

$K \in \mathcal{T}_h$ に対し，$K^l = G_h(K)$ とし，Ω の分割を $\mathcal{T}_h^l = \{K^l \colon K \in \mathcal{T}_h\}$ と定める．同様に，$E^l = G_h(E)$ とし，Γ の分割を $\mathcal{E}_h^l = \{E^l \colon E \in \mathcal{E}_h\}$ と定める．
関数 $\eta_h \colon \Omega_h \to \mathbb{R}^m$ に対し，$\eta_h^l \colon \Omega \to \mathbb{R}^m$ を $\eta_h^l = \eta_h \circ G_h^{-1}$ とする．同様に $\eta \colon \Omega \to \mathbb{R}^m$ に対し，$\eta^{-l} \colon \Omega_h \to \mathbb{R}^m$ を $\eta_h^{-l} = \eta \circ G_h$ で定める．

$$c_1 \|\eta_h^l\|_{L^2(\Omega)} \le \|\eta_h\|_{L^2(\Omega_h)} \le c_2 \|\eta_h^l\|_{L^2(\Omega)}$$
$$c_1 \|\nabla \eta_h^l\|_{L^2(\Omega)} \le \|\nabla \eta_h\|_{L^2(\Omega_h)} \le c_2 \|\nabla \eta_h^l\|_{L^2(\Omega)}$$
$$c_1 \|\eta_h^l\|_{L^2(\Gamma)} \le \|\eta_h\|_{L^2(\Gamma_h)} \le c_2 \|\eta_h^l\|_{L^2(\Gamma)}$$
$$c_1 \|\nabla_\Gamma \eta_h^l\|_{L^2(\Gamma)} \le \|\nabla_{\Gamma_h} \eta_h\|_{L^2(\Gamma_h)} \le c_2 \|\nabla_\Gamma \eta_h^l\|_{L^2(\Gamma)}$$

3．モデル方程式とスキーム

モデル方程式

Poisson 方程式

$$\left\{\begin{array}{rcll} -\Delta u &=& f & \text{in} \quad \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} + \alpha u - \beta \Delta_\Gamma u &=& g & \text{on} \quad \Gamma \end{array}\right. \tag{2}$$

f, g：十分滑らか，α, β：正定数
$\Delta_\Gamma = \Delta_\Gamma \cdot \Delta_\Gamma$ は Γ 上の Laplace-Beltrami 作用素

Ω_h 上の有限要素空間 V_h を

$$V_h := \{ v_h \in L^2(\Omega_h) \colon v_h|_K \text{は } K \in \mathcal{T}_h \text{上 1 次以下の多項式} \}$$

で定める

準備-数値流速

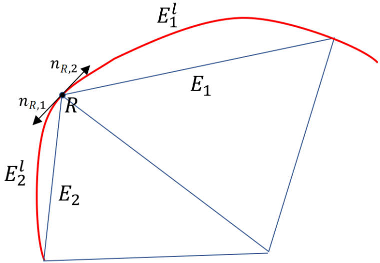
$E \in \mathcal{I}_h$ に対し，$\{\!\{\cdot\}\!\}_E$ および $[\![\cdot]\!]_E$ を以下のように定める．

$$\{\!\{v\}\!\}_E := \frac{1}{2}(v_1 + v_2), \qquad [\![v]\!]_E := v_1 n_{E,1} + v_2 n_{E,2},$$
$$\{\!\{\nabla v\}\!\}_E := \frac{1}{2}(\nabla v_1 + \nabla v_2), \qquad [\![\nabla v]\!]_E := \nabla v_1 \cdot n_{E,1} + \nabla v_2 \cdot n_{E,2}$$

ここで，$E = \partial K_1 \cap \partial K_2$ を満たす相異なる $K_1, K_2 \in \mathcal{T}_h$ が存在し，$v_i = v|_{K_i}$，$n_{E,i}$ は E 上の K_i に関する外向き単位法線ベクトルである．
同様に，$R \in \mathcal{R}_h$ に対し，$\{\!\{\cdot\}\!\}_R$ および $[\![\cdot]\!]_R$ を以下のように定める．

$$\{\!\{v\}\!\}_R := \frac{1}{2}(v_1 + v_2), \qquad [\![v]\!]_R := v_1 n_{R,1} + v_2 n_{R,2},$$
$$\{\!\{\nabla_{\Gamma_h} v\}\!\}_R := \frac{1}{2}(\nabla_{\Gamma_h} v_1 + \nabla_{\Gamma_h} v_2), \quad [\![\nabla_{\Gamma_h} v]\!]_R := \nabla_{\Gamma_h} v_1 \cdot n_{R,1} + \nabla_{\Gamma_h} v_2 \cdot n_{R,2}$$

ここで，$R = E_1 \cap E_2$ を満たす相異なる $E_1, E_2 \in \mathcal{E}_h$ が存在し，$v_i = v|_{E_i}$，$n_{E,i}$ は R 上の E_i^l に関する単位方向ベクトルである．



同様に，$R \in \mathcal{R}_h$ に対し，$\{\!\{\cdot\}\!\}_R$ および $[\![\cdot]\!]_R$ を以下のように定める．

$$\{\!\{v\}\!\}_R := \frac{1}{2}(v_1 + v_2), \qquad [\![v]\!]_R := v_1 n_{R,1} + v_2 n_{R,2},$$
$$\{\!\{\nabla_{\Gamma_h} v\}\!\}_R := \frac{1}{2}(\nabla_{\Gamma_h} v_1 + \nabla_{\Gamma_h} v_2), \quad [\![\nabla_{\Gamma_h} v]\!]_R := \nabla_{\Gamma_h} v_1 \cdot n_{R,1} + \nabla_{\Gamma_h} v_2 \cdot n_{R,2}$$

ここで，$R = E_1 \cap E_2$ を満たす相異なる $E_1, E_2 \in \mathcal{E}_h$ が存在し，$v_i = v|_{E_i}$，$n_{E,i}$ は R 上の E_i^l に関する単位方向ベクトルである．

スキーム

DG 法

$$\text{Find} \quad u_h \in V_h \quad \text{s.t.} \quad a_{\Omega_h}(u_h, \chi) = l_h(\chi) \quad {}^\forall \chi \in V_h \tag{3}$$

$$\begin{aligned}
a_{\Omega_h}(u,v) &= a_{\mathcal{T}_h}(u,v) + a_{\mathcal{E}_h}(u,v) \\
a_{\mathcal{T}_h}(u,v) &= \sum_{K\in\mathcal{T}_h} (\nabla u, \nabla v)_K \\
&\quad + \sum_{E\in\mathcal{I}_h} \Big(-(\{\!\{\nabla u\}\!\}_E, [\![v]\!]_E)_E - ([\![v]\!]_E, \{\!\{\nabla v\}\!\}_E)_E + \frac{\sigma}{h}([\![u]\!]_E, [\![v]\!]_E)_E \Big) \\
a_{\mathcal{E}_h}(u,v) &= \sum_{E\in\mathcal{E}_h} \Big(\alpha(u,v)_E + \beta(\nabla_{\Gamma_h} u, \nabla_{\Gamma_h} v)_E \Big) \\
&\quad + \sum_{R\in\mathcal{R}_h} \beta\Big(-(\{\!\{\nabla_{\Gamma_h} u\}\!\}_R, [\![v]\!]_R)_R - ([\![v]\!]_R, \{\!\{\nabla_{\Gamma_h} v\}\!\}_R)_R + \frac{\sigma}{h}([\![u]\!]_R, [\![v]\!]_R)_R \Big) \\
l_h(v) &= (\widetilde{I}_h f, v)_{\Omega_h} + (\widetilde{I}_h g, v)_{\Gamma_h}
\end{aligned}$$

$\sigma > 0$：十分大きな定数，$\widetilde{I}_h$ ：V_h への Lagrange 補間

4．スキームの解析と誤差評価

厳密な分割に対するスキーム

Ω 上の有限要素空間を $V_h^l = \{v_h^l \in L^2(\Omega)\colon v_h \in V_h\}$ とする．Ω の分割 $\mathcal{T}_h^l$ を用いて，

$$
\begin{aligned}
a_\Omega(u,v) &= a_{\mathcal{T}_h^l}(u,v) + a_{\mathcal{E}_h^l}(u,v) \\
a_{\mathcal{T}_h^l}(u,v) &= \sum_{K^l \in \mathcal{T}_h^l} (\nabla u, \nabla v)_{K^l} \\
&\quad + \sum_{E \in \mathcal{I}_h} \Big(-(\{\!\{\nabla u\}\!\}_E, [\![v]\!]_E)_E - ([\![v]\!]_E, \{\!\{\nabla v\}\!\}_E)_E + \frac{\sigma}{h}([\![u]\!]_E, [\![v]\!]_E)_E \Big) \\
a_{\mathcal{E}_h^l}(u,v) &= \sum_{E^l \in \mathcal{E}_h^l} \Big(\alpha(u,v)_{E^l} + \beta(\nabla_\Gamma u, \nabla_\Gamma v)_{E^l} \Big) \\
&\quad + \sum_{R \in \mathcal{R}_h} \beta \Big(-(\{\!\{\nabla_{\Gamma_h} u\}\!\}_R, [\![v]\!]_R)_R - ([\![v]\!]_R, \{\!\{\nabla_{\Gamma_h} v\}\!\}_R)_R + \frac{\sigma}{h}([\![u]\!]_R, [\![v]\!]_R)_R \Big) \\
l(v) &= (f,v)_\Omega + (g,v)_\Gamma
\end{aligned}
$$

と定める．このとき，$u \in H^2(\Omega,\Gamma) = \{v \in H^2(\Omega)\colon v|_\Gamma \in H^2(\Gamma)\}$ が (2) の解ならば，

$$
a_\Omega(u,v) = l(v) \quad {}^\forall v \in H^2(\Omega,\Gamma) + V_h^l
$$

が成り立つ．

ノルム

解析のためにノルムを以下のように定める.

$$
\|v\|^2_{\mathcal{T}_h,\mathcal{I}_h} = \sum_{K\in\mathcal{T}_h} |v|^2_{H^1(K)} + \sum_{E\in\mathcal{I}_h} \frac{1}{h}\|[\![v]\!]_E\|^2_{L^2(E)} + \sum_{E\in\mathcal{I}_h} h\|\{\!\{\nabla v\}\!\}_E\|^2_{L^2(E)}
$$

$$
\|v\|^2_{\mathcal{E}_h,\mathcal{R}_h} = \sum_{E\in\mathcal{E}_h} \left(\alpha\|v\|^2_{L^2(E)} + \beta\|\nabla_{\Gamma_h} v\|^2_{L^2(E)}\right) + \beta\sum_{R\in\mathcal{R}_h} \frac{1}{h}[\![v]\!]^2_R + \beta\sum_{E\in\mathcal{R}_h} h\{\!\{\nabla_{\Gamma_h} v\}\!\}^2_R
$$

$$
\|v\|^2_{\mathsf{DG},\Omega_h} = \|v\|^2_{\mathcal{T}_h,\mathcal{I}_h} + \|v\|^2_{\mathcal{E}_h,\mathcal{R}_h} \quad \|v\|^2_{\mathsf{DG},\Omega} = \|v\|^2_{\mathcal{T}^l_h,\mathcal{I}_h} + \|v\|^2_{\mathcal{E}^l_h,\mathcal{R}_h}
$$

連続性，強圧性

これらのノルムに対し，以下が成り立つ．

補題 1

σ が十分大きいならば，h に依存しない正定数 C が存在し，以下が成り立つ．

$$
\begin{aligned}
a_{\Omega_h}(u,v) &\leq C\|u\|_{\mathsf{DG},\Omega_h}\|v\|_{\mathsf{DG},\Omega_h} && u,v \in H^2(\Omega_h,\Gamma_h)+V_h \\
a_{\Omega}(u,v) &\leq C\|u\|_{\mathsf{DG},\Omega}\|v\|_{\mathsf{DG},\Omega} && u,v \in H^2(\Omega,\Gamma)+V_h^l \\
a_{\Omega_h}(v_h,v_h) &\geq C\|v_h\|_{\mathsf{DG},\Omega_h}^2 && v_h \in V_h \\
a_{\Omega}(v_h^l,v_h^l) &\geq C\|v_h^l\|_{\mathsf{DG},\Omega}^2 && v_h^l \in V_h^l
\end{aligned}
$$

補題 2

$u_h, v_h \in V_h$ に対し，以下が成り立つ．

$$
\begin{aligned}
\left| a_{\mathcal{T}_h^l}(u_h^l, v_h^l) - a_{\mathcal{T}_h}(u_h, v_h) \right| &\le Ch \|u_h^l\|_{\mathcal{B}_h^l, \mathcal{J}_h} \|v_h^l\|_{\mathcal{B}_h^l, \mathcal{J}_h} \\
\left| a_{\mathcal{E}_h^l}(u_h^l, v_h^l) - a_{\mathcal{E}_h}(u_h, v_h) \right| &\le Ch^2 \|u_h^l\|_{\mathcal{E}_h^l, \mathcal{R}_h} \|v_h^l\|_{\mathcal{E}_h^l, \mathcal{R}_h} \\
\left| l(v_h^l) - l_h(v_h) \right| &\le Ch \|v_h^l\|_{\mathsf{DG},\Omega}
\end{aligned}
$$

ただし，

$$
\mathcal{B}_h^l = \{K^l \in \mathcal{T}_h^l \colon G_h^{-1}|_{K^l} \neq \mathrm{id}_{K^l}\},
$$
$$
\mathcal{J}_h = \{E \in \mathcal{I}_h \colon E \subset \partial K^l \text{となる } K^l \in \mathcal{B}_h^l \text{が存在 }\}
$$

である．

誤差評価

略証

$$\sum_{K^l\in\mathcal{T}_h^l}(\nabla u_h^l,\nabla v_h^l)_{K^l}-\sum_{K\in\mathcal{T}_h}(\nabla u_h,\nabla v_h)_K$$

$$=\sum_{K^l\in\mathcal{T}_h^l}\int_{K^l}(\nabla u_h^l\cdot\nabla v_h^l-DG_h^{\mathrm{T}}\nabla u_h^l\cdot DG_h^{\mathrm{T}}\nabla v_h^l\frac{1}{J_h^l})dx$$

$$=\sum_{K^l\in\mathcal{B}_h^l}\left(\int_{K^l}(I-DG_h^{\mathrm{T}})\nabla u_h^l\cdot DG_h^{\mathrm{T}}\nabla v_h^l\frac{1}{J_h^l}dx\right.$$

$$\left.+\int_{K^l}\nabla u_h^l\cdot(I-DG_h^{\mathrm{T}})\nabla v_h^l\frac{1}{J_h^l}dx+\int_{K^l}\nabla u_h^l\cdot\nabla v_h^l(1-\frac{1}{J_h^l})\right)dx$$

$$\leq Ch\sum_{K^l\in\mathcal{B}_h^l}(\nabla u_h^l,\nabla v_h^l)_{K^l}$$

誤差評価

定理 1

$u \in H^2(\Omega, \Gamma)$ が (2) の解であるとし，$u_h \in V_h$ が (3) の解であるとする．
このとき，h が十分小さいならば，h に依存しない正定数 C が存在し，

$$\|u^{-l} - u_h\|_{\mathsf{DG},\Omega_h} \leq Ch \tag{4}$$

が成り立つ．

略証) Step. 1

V_h への Ritz 射影 $\widetilde{R}_h$ を $a_{\Omega_h}(\widetilde{R}_h, v_h) = a_\Omega(u, v_h) \quad {}^\forall v_h \in V_h$ で定め，
$R_h = (\widetilde{R}_h)^l$ とする．$I_h u = (\widetilde{I}_h u)$ とすると，
$u^{-l} - u_h = (u - I_h u)^{-l} + (\widetilde{R}_h u - u_h) + (I_h u - R_h u)^{-1}$ である．

$$\begin{aligned}\|\widetilde{R}_h u - u_h\|^2_{\mathsf{DG},\Omega_h} &\leq C(a_{\Omega_h}(\widetilde{R_h u}, \widetilde{R}_h u - u_h) - a_{\Omega_h}(u_h, \widetilde{R}_h u - u_h)) \\ &= C(l((\widetilde{R}_h u - u_h)^l) - l_h(\widetilde{R}_h u - u_h)) \leq Ch\|\widetilde{R}_h u - u_h\|_{\mathsf{DG},\Omega_h}\end{aligned}$$

略証) Step. 2

$$\|I_h u - R_h u\|_{\mathrm{DG},\Omega}^2 \le a_\Omega(u - R_h u, I_h u - R_h u) - a_\Omega(u - I_h u, I_h u - R_h u)$$

であり，Young の不等式より，

$$\|I_h u - R_h u\|_{\mathrm{DG},\Omega}^2 \le Ch^2 + Ca_\Omega(u - R_h u, I_h u - R_h u)$$

となる．$v_h^l = I_h u - R_h u \in V_h^l$ とすると，

$$\begin{aligned} a_\Omega(u - R_h u, I_h u - R_h u) &= a_{\Omega_h}(\widetilde{R}_h u, v_h) - a_\Omega(R_h u, v_h^l) \\ &\le C(h\|R_h u\|_{\mathcal{B}_h^l,\mathcal{J}_h}\|v_h^l\|_{\mathcal{B}_h^l,\mathcal{J}_h} + h^2\|R_h u\|_{\mathcal{E}_h^l,\mathcal{R}_h}\|v_h^l\|_{\mathcal{E}_h^l,\mathcal{R}_h}) \end{aligned}$$

となる．

誤差評価

略証) Step. 3

多項式についての逆不等式より，
$N(\mathcal{B}_h^l) = \{K^l \in \mathcal{T}_h^l : E \subset \partial K^l$ となる $E \in \mathcal{J}_h^l$ が存在 $\}$ とすると，

$$
\begin{aligned}
&\|R_h u\|_{\mathcal{B}_h^l, \mathcal{J}_h} \|v_h^l\|_{\mathcal{B}_h^l, \mathcal{J}_h} \leq C \sum_{K^l \in N(\mathcal{B}_h^l)} |R_h u|_{H^1(K^l)} |v_h^l|_{H^1(K^l)} \\
&\leq C \sum_{K^l \in N(\mathcal{B}_h^l)} (|u|_{H^1(K^l)} + |u - R_h u|_{H^1(K^l)})(|u - R_h u|_{H^1(K^l)} + |u - I_h u|_{H^1(K^l)}) \\
&\leq C \sum_{K^l \in N(\mathcal{B}_h^l)} (|u|^2_{H^1(K^l)} + |u - R_h u|^2_{H^1(K^l)} + |u - I_h u|^2_{H^1(K^l)}) \\
&\leq C(\|I_h u - R_h u\|^2_{\mathrm{DG},\Omega} + h^2) + Ch\|u\|_{H^2(\Omega)} \qquad (\because \text{ ER13, Lemma 6.3})
\end{aligned}
$$

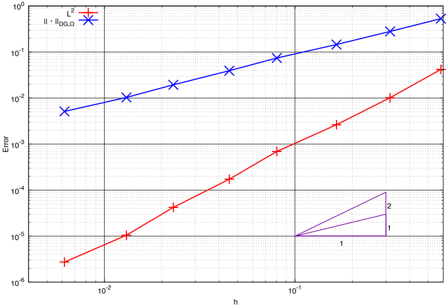
となる．同様に評価することで，

$$
\begin{aligned}
&a_\Omega(u - R_h u, I_h u - R_h u) \\
&\leq Ch(\|I_h u - R_h u\|^2_{\mathrm{DG},\Omega} + h^2) + Ch^2(\|u\|_{H^2(\Omega)} + \|u\|_{H^2(\Gamma)})
\end{aligned}
$$

5．数値計算

数値計算

$\Omega = \{|x| < 1\} \subset \mathbb{R}^2$，厳密解 $u(x) = \exp(-|x|^2)$



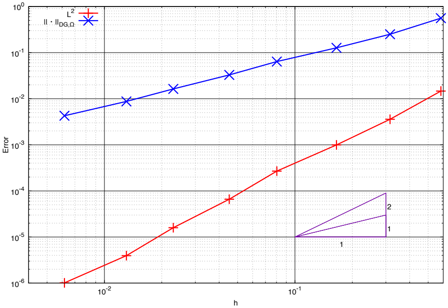
(a) P1 要素

図: エネルギーノルム及び L^2 ノルムの誤差

エネルギーノルムが $O(h)$，L^2 ノルムが $O(h^2)$

数値計算

$\Omega = \{|x| < 1\} \subset \mathbb{R}^2$，厳密解 $u(x) = \sin(x_1)\sin(x_2)$

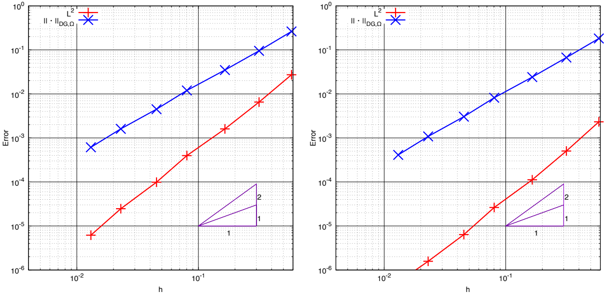


(a) P1 要素

図: エネルギーノルム及び L^2 ノルムの誤差

エネルギーノルムが $O(h)$，L^2 ノルムが $O(h^2)$

同様の計算を P2 要素でも行った.



(a) 球対称　　(b) 非球対称

図: エネルギーノルム及び L^2 ノルムの誤差

エネルギーノルムが $O(h^{1.5})$, L^2 ノルムが $O(h^2)$

結論

滑らかな領域上の一般化 Robin 境界条件を持つ Poisson 方程式に対する，P1 要素を用いた DG 法について，エネルギーノルムによる誤差評価を得た.

今後の課題

- L^2 ノルムや L^∞ ノルムといった，他のノルムによる評価
- 3 次元領域に対しての本手法の適用
- 動的境界条件に対して，本手法の適用