# 一般化 Robin 境界条件に対する不連続 Galerkin 法

千葉悠喜

東京大学大学院数理科学研究科

日本数学会 2019 年度秋季総合分科会
金沢大学
2019 年 9 月 17 日

# 目次

# 1．はじめに

複雑な境界条件を持つ方程式 $\to$ 現実問題への応用に需要

### 曲線上の Laplace-Beltrami 作用素 $\Delta_\Gamma$ を含む境界条件

動的境界条件

$$\mu\frac{\partial u}{\partial t} = -\alpha u + \beta\Delta_\Gamma u - \frac{\partial u}{\partial \nu} + g$$

一般化 Robin 境界条件

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} + \alpha u - \beta\Delta_\Gamma u = g$$

$\to$reduced-FSI モデル，Cahn-Hilliard 方程式

# はじめに

**動的境界条件や一般化 Robin 境界条件に関する過去の研究**

有限要素法　: Kashiwabara et al. (2015), Kovács & Lubich (2017)

不連続 Galerkin(DG) 法　: Antonietti et al. (2016)

Kovács & Lubich では滑らかな領域上の方程式を扱っている一方，
Antonietti et al. では矩形領域のみを扱っている．
$\rightarrow$ 現実の問題への応用が難しい一因

滑らかな領域上の一般化 Robin 境界条件を持つ Poisson 方程式に対し，DG 法の適用とその解析

## 2．領域の多角形近似

cf. Elliott & Ranner (2013)

# 領域の多角形近似

$\Omega \subset \mathbb{R}^2$，境界 $\Gamma = \partial\Omega$ は十分滑らか
$\mathcal{T}_h$：$\Omega_h$ の正則，準一様な三角形分割，$\Omega_h = \mathrm{int}(\cup_{K \in \mathcal{T}_h} \overline{K})$，$\Gamma_h = \partial\Omega_h$
$\mathcal{E}_h = \{E\colon E$ は $K \in \mathcal{T}_h$の辺, $E \subset \Gamma_h\}$：$\Gamma_h$ の分割
$\mathcal{I}_h = \{E\colon E$ は $K \in \mathcal{T}_h$の辺, $E \not\subset \Gamma_h\}$, $\mathcal{R}_h = \{R\colon R$ は $E \in \mathcal{E}_h$の端点 $\}$

### 仮定 1

- $E \in \mathcal{E}_h$ の頂点がすべて $\Gamma$ 上にある
- $\Gamma_h$ に各 $K \in \mathcal{T}_h$ の辺が高々 1 つしか含まれない

# 領域の近似

$G_h\colon \Omega_h \to \Omega$ を $\Gamma$ への直交射影 $p$ を用いて Elliott & Ranner (2013) の §4 のように定める.

## $G_h$ の性質

- $G_h|_{\Gamma_h} = p$
- $G_h|_K \in C^2(K)$, $K$ が $\Gamma_h$ 上に頂点を持たないならば, $G_h|_K = \mathrm{id}_K$
- $\|DG_h^{\mathrm{T}}|_K - I\|_{L^\infty(K)} \le Ch$, $\|\left|\det DG_h^{\mathrm{T}}|_K\right| - 1\|_{L^\infty(K)} \le Ch$

$\Gamma$ および $\Gamma_h$ 上の接方向の勾配 $\nabla_\Gamma$, $\nabla_{\Gamma_h}$ を以下のように定める.

$$\nabla_\Gamma u = \nabla u - (\nabla u \cdot \nu)\nu = P\nabla u,\ \nabla_{\Gamma_h} u = \nabla u - (\nabla u \cdot \nu_h)\nu_h = P_h \nabla u$$

$d$ を $\Gamma$ との符号付き距離, $\mathcal{H} = \left(\frac{\partial^2 d}{\partial x_i \partial x_j}\right)_{i,j}$, $d\Gamma = \mu_h d\Gamma_h$,
$Q_h = \frac{1}{\mu_h}(I - d\mathcal{H})PP_hP(I - d\mathcal{H})$ とすると以下が成り立つ.

$$|\mu_h Q_h - I| \le Ch^2,\ |\mu_h - 1| \le Ch^2$$

# 領域の近似

$K \in \mathcal{T}_h$ に対し，$K^l = G_h(K)$ とし，$\Omega$ の分割を $\mathcal{T}_h^l = \{K^l : K \in \mathcal{T}_h\}$ と定める．同様に，$E^l = G_h(E)$ とし，$\Gamma$ の分割を $\mathcal{E}_h^l = \{E^l : E \in \mathcal{E}_h\}$ と定める．
関数 $\eta_h : \Omega_h \to \mathbb{R}^m$ に対し，$\eta_h^l : \Omega \to \mathbb{R}^m$ を $\eta_h^l = \eta_h \circ G_h^{-1}$ とする．同様に $\eta : \Omega \to \mathbb{R}^m$ に対し，$\eta^{-l} : \Omega_h \to \mathbb{R}^m$ を $\eta_h^{-l} = \eta \circ G_h$ で定める．

$$c_1 \|\eta_h^l\|_{L^2(\Omega)} \le \|\eta_h\|_{L^2(\Omega_h)} \le c_2 \|\eta_h^l\|_{L^2(\Omega)}$$
$$c_1 \|\nabla \eta_h^l\|_{L^2(\Omega)} \le \|\nabla \eta_h\|_{L^2(\Omega_h)} \le c_2 \|\nabla \eta_h^l\|_{L^2(\Omega)}$$
$$c_1 \|\eta_h^l\|_{L^2(\Gamma)} \le \|\eta_h\|_{L^2(\Gamma_h)} \le c_2 \|\eta_h^l\|_{L^2(\Gamma)}$$
$$c_1 \|\nabla_\Gamma \eta_h^l\|_{L^2(\Gamma)} \le \|\nabla_{\Gamma_h} \eta_h\|_{L^2(\Gamma_h)} \le c_2 \|\nabla_\Gamma \eta_h^l\|_{L^2(\Gamma)}$$

## 3．モデル方程式とスキーム

# モデル方程式

## Poisson 方程式

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in} \quad \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} + \alpha u - \beta \Delta_\Gamma u = g & \text{on} \quad \Gamma \end{cases} \tag{1}$$

$f$, $g$ : 十分滑らか，$\alpha$, $\beta$ : 正定数
$\Delta_\Gamma = \Delta_\Gamma \cdot \Delta_\Gamma$ は $\Gamma$ 上の Laplace-Beltrami 作用素

$\Omega_h$ 上の有限要素空間 $V_h$ を

$$V_h := \{ v_h \in L^2(\Omega_h) \colon v_h|_K \text{は } K \in \mathcal{T}_h \text{上 } 1 \text{ 次以下の多項式} \}$$

で定める．

# 準備-数値流速

$E \in \mathcal{I}_h$ に対し，$\{\!\{\cdot\}\!\}_E$ および $[\![\cdot]\!]_E$ を以下のように定める．

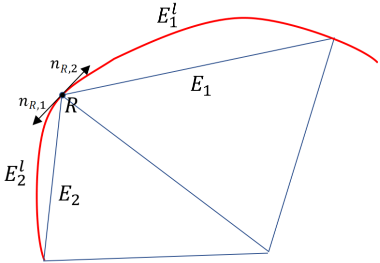
$$\{\!\{v\}\!\}_E := \frac{1}{2}(v_1 + v_2), \qquad [\![v]\!]_E := v_1 n_{E,1} + v_2 n_{E,2},$$
$$\{\!\{\nabla v\}\!\}_E := \frac{1}{2}(\nabla v_1 + \nabla v_2), \qquad [\![\nabla v]\!]_E := \nabla v_1 \cdot n_{E,1} + \nabla v_2 \cdot n_{E,2}$$

ここで，$E = \partial K_1 \cap \partial K_2$ を満たす相異なる $K_1, K_2 \in \mathcal{T}_h$ が存在し，
$v_i = v|_{K_i}$，$n_{E,i}$ は $E$ 上の $K_i$ に関する外向き単位法線ベクトルである．
同様に，$R \in \mathcal{R}_h$ に対し，$\{\!\{\cdot\}\!\}_R$ および $[\![\cdot]\!]_R$ を以下のように定める．

$$\{\!\{v\}\!\}_R := \frac{1}{2}(v_1 + v_2), \qquad [\![v]\!]_R := v_1 n_{R,1} + v_2 n_{R,2},$$
$$\{\!\{\nabla_{\Gamma_h} v\}\!\}_R := \frac{1}{2}(\nabla_{\Gamma_h} v_1 + \nabla_{\Gamma_h} v_2), \quad [\![\nabla_{\Gamma_h} v]\!]_R := \nabla_{\Gamma_h} v_1 \cdot n_{R,1} + \nabla_{\Gamma_h} v_2 \cdot n_{R,2}$$

ここで，$R = E_1 \cap E_2$ を満たす相異なる $E_1, E_2 \in \mathcal{E}_h$ が存在し，$v_i = v|_{E_i}$，
$n_{R,i}$ は $R$ 上の $E_i^l$ に関する単位方向ベクトルである．

# 準備-数値流速




同様に，$R \in \mathcal{R}_h$ に対し，$\{\!\{\cdot\}\!\}_R$ および $[\![\cdot]\!]_R$ を以下のように定める．

$$
\begin{aligned}
\{\!\{v\}\!\}_R &:= \frac{1}{2}(v_1 + v_2), & [\![v]\!]_R &:= v_1 n_{R,1} + v_2 n_{R,2}, \\
\{\!\{\nabla_{\Gamma_h} v\}\!\}_R &:= \frac{1}{2}(\nabla_{\Gamma_h} v_1 + \nabla_{\Gamma_h} v_2), & [\![\nabla_{\Gamma_h} v]\!]_R &:= \nabla_{\Gamma_h} v_1 \cdot n_{R,1} + \nabla_{\Gamma_h} v_2 \cdot n_{R,2}
\end{aligned}
$$

ここで，$R = E_1 \cap E_2$ を満たす相異なる $E_1, E_2 \in \mathcal{E}_h$ が存在し，$v_i = v|_{E_i}$，$n_{R,i}$ は $R$ 上の $E_i^l$ に関する単位方向ベクトルである．

# スキーム

## DG 法

$$\text{Find} \quad u_h \in V_h \quad \text{s.t.} \quad a_{\Omega_h}(u_h, \chi) = l_h(\chi) \quad {}^\forall \chi \in V_h \tag{2}$$

$$
\begin{aligned}
a_{\Omega_h}(u,v) &= a_{\mathcal{T}_h}(u,v) + a_{\mathcal{E}_h}(u,v) \\
a_{\mathcal{T}_h}(u,v) &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} (\nabla u, \nabla v)_K \\
&\quad + \sum_{E \in \mathcal{I}_h} \Big( -(\{\!\{\nabla u\}\!\}_E, [\![v]\!]_E)_E - ([\![v]\!]_E, \{\!\{\nabla v\}\!\}_E)_E + \frac{\sigma}{h}([\![u]\!]_E, [\![v]\!]_E)_E \Big) \\
a_{\mathcal{E}_h}(u,v) &= \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \Big( \alpha(u,v)_E + \beta(\nabla_{\Gamma_h} u, \nabla_{\Gamma_h} v)_E \Big) \\
&\quad + \sum_{R \in \mathcal{R}_h} \beta \Big( -(\{\!\{\nabla_{\Gamma_h} u\}\!\}_R, [\![v]\!]_R)_R - ([\![v]\!]_R, \{\!\{\nabla_{\Gamma_h} v\}\!\}_R)_R + \frac{\sigma}{h}([\![u]\!]_R, [\![v]\!]_R)_R \Big) \\
l_h(v) &= (\widetilde{I}_h f, v)_{\Omega_h} + (\widetilde{I}_h g, v)_{\Gamma_h}
\end{aligned}
$$

$\sigma > 0$：十分大きな定数，$\widetilde{I}_h$ : $V_h$ への Lagrange 補間

# 4．スキームの解析と誤差評価

# 厳密な分割に対するスキーム

$\Omega$ 上の有限要素空間を $V_h^l = \{v_h^l \in L^2(\Omega)\colon v_h \in V_h\}$ とする．$\Omega$ の分割 $\mathcal{T}_h^l$ を用いて，

$$
\begin{aligned}
a_\Omega(u,v) &= a_{\mathcal{T}_h^l}(u,v) + a_{\mathcal{E}_h^l}(u,v) \\
a_{\mathcal{T}_h^l}(u,v) &= \sum_{K^l \in \mathcal{T}_h^l} (\nabla u, \nabla v)_{K^l} \\
&\quad + \sum_{E \in \mathcal{I}_h} \Big( -(\{\!\{\nabla u\}\!\}_E, [\![v]\!]_E)_E - ([\![v]\!]_E, \{\!\{\nabla v\}\!\}_E)_E + \frac{\sigma}{h}([\![u]\!]_E, [\![v]\!]_E)_E \Big) \\
a_{\mathcal{E}_h^l}(u,v) &= \sum_{E^l \in \mathcal{E}_h^l} \Big( \alpha(u,v)_{E^l} + \beta(\nabla_\Gamma u, \nabla_\Gamma v)_{E^l} \Big) \\
&\quad + \sum_{R \in \mathcal{R}_h} \beta \Big( -(\{\!\{\nabla_{\Gamma_h} u\}\!\}_R, [\![v]\!]_R)_R - ([\![v]\!]_R, \{\!\{\nabla_{\Gamma_h} v\}\!\}_R)_R + \frac{\sigma}{h}([\![u]\!]_R, [\![v]\!]_R)_R \Big) \\
l(v) &= (f,v)_\Omega + (g,v)_\Gamma
\end{aligned}
$$

と定める．このとき，$u \in H^2(\Omega,\Gamma) = \{v \in H^2(\Omega)\colon v|_\Gamma \in H^2(\Gamma)\}$ が (1) の解ならば，

$$
a_\Omega(u,v) = l(v) \quad {}^\forall v \in H^2(\Omega,\Gamma) + V_h^l
$$

が成り立つ．

# ノルム

解析のためにノルムを以下のように定める.

$$
\begin{aligned}
\|v\|^2_{\mathcal{T}_h,\mathcal{I}_h} &= \sum_{K\in\mathcal{T}_h} |v|^2_{H^1(K)} \\
&\qquad + \sum_{E\in\mathcal{I}_h} \frac{1}{h}\|[\![v]\!]_E\|^2_{L^2(E)} + \sum_{E\in\mathcal{I}_h} h\|\{\!\{\nabla v\}\!\}_E\|^2_{L^2(E)} \\
\|v\|^2_{\mathcal{E}_h,\mathcal{R}_h} &= \sum_{E\in\mathcal{E}_h} \left(\alpha\|v\|^2_{L^2(E)} + \beta\|\nabla_{\Gamma_h} v\|^2_{L^2(E)}\right) \\
&\qquad + \beta \sum_{R\in\mathcal{R}_h} \frac{1}{h}[\![v]\!]^2_R + \beta \sum_{E\in\mathcal{R}_h} h\{\!\{\nabla_{\Gamma_h} v\}\!\}^2_R \\
\|v\|^2_{\mathsf{DG},\Omega_h} &= \|v\|^2_{\mathcal{T}_h,\mathcal{I}_h} + \|v\|^2_{\mathcal{E}_h,\mathcal{R}_h} \quad \|v\|^2_{\mathsf{DG},\Omega} = \|v\|^2_{\mathcal{T}^l_h,\mathcal{I}_h} + \|v\|^2_{\mathcal{E}^l_h,\mathcal{R}_h}
\end{aligned}
$$

# 連続性，強圧性

これらのノルムに対し，以下が成り立つ．

## 補題 1

$\sigma$ が十分大きいならば，$h$ に依存しない正定数 $C$ が存在し，以下が成り立つ．

$$
\begin{aligned}
a_{\Omega_h}(u,v) &\le C\|u\|_{\mathsf{DG},\Omega_h}\|v\|_{\mathsf{DG},\Omega_h} && u,v\in H^2(\Omega_h,\Gamma_h)+V_h\\
a_{\Omega}(u,v) &\le C\|u\|_{\mathsf{DG},\Omega}\|v\|_{\mathsf{DG},\Omega} && u,v\in H^2(\Omega,\Gamma)+V_h^l\\
a_{\Omega_h}(v_h,v_h) &\ge C\|v_h\|_{\mathsf{DG},\Omega_h}^2 && v_h\in V_h\\
a_{\Omega}(v_h^l,v_h^l) &\ge C\|v_h^l\|_{\mathsf{DG},\Omega}^2 && v_h^l\in V_h^l
\end{aligned}
$$

# 誤差評価

## 補題 2

$u_h, v_h \in V_h$ に対し，以下が成り立つ．

$$\left| a_{\mathcal{T}_h^l}(u_h^l, v_h^l) - a_{\mathcal{T}_h}(u_h, v_h) \right| \leq Ch \|u_h^l\|_{\mathcal{B}_h^l, \mathcal{J}_h} \|v_h^l\|_{\mathcal{B}_h^l, \mathcal{J}_h}$$

$$\left| a_{\mathcal{E}_h^l}(u_h^l, v_h^l) - a_{\mathcal{E}_h}(u_h, v_h) \right| \leq Ch^2 \|u_h^l\|_{\mathcal{E}_h^l, \mathcal{R}_h} \|v_h^l\|_{\mathcal{E}_h^l, \mathcal{R}_h}$$

$$\left| l(v_h^l) - l_h(v_h) \right| \leq Ch \|v_h^l\|_{\mathsf{DG}, \Omega}$$

ただし，

$$\mathcal{B}_h^l = \{K^l \in \mathcal{T}_h^l \colon G_h^{-1}|_{K^l} \neq \mathrm{id}_{K^l}\},$$
$$\mathcal{J}_h = \{E \in \mathcal{I}_h \colon E \subset \partial K^l \text{となる } K^l \in \mathcal{B}_h^l \text{が存在}\}$$

である．

# 誤差評価

## 定理 1

$u \in H^2(\Omega, \Gamma)$ が (1) の解であるとし，$u_h \in V_h$ が (2) の解であるとする．
このとき，$h$ が十分小さいならば，$h$ に依存しない正定数 $C$ が存在し，

$$\|u^{-l} - u_h\|_{\mathsf{DG},\Omega_h} \leq Ch \tag{3}$$

が成り立つ．

## 略証) Step. 1

$V_h$ への Ritz 射影 $\widetilde{R}_h$ を $a_{\Omega_h}(\widetilde{R}_h, v_h) = a_\Omega(u, v_h^l) \quad {}^\forall v_h \in V_h$ で定め，
$R_h = (\widetilde{R}_h)^l$ とする．$I_h u = (\widetilde{I}_h u)^l$ とすると，
$u^{-l} - u_h = (u - I_h u)^{-l} + (\widetilde{R}_h u - u_h) + (I_h u - R_h u)^{-l}$ である．

$$\begin{aligned}\|\widetilde{R}_h u - u_h\|^2_{\mathsf{DG},\Omega_h} &\leq C(a_{\Omega_h}(\widetilde{R_h u}, \widetilde{R}_h u - u_h) - a_{\Omega_h}(u_h, \widetilde{R}_h u - u_h))\\ &= C(l((\widetilde{R}_h u - u_h)^l) - l_h(\widetilde{R}_h u - u_h)) \leq Ch\|\widetilde{R}_h u - u_h\|_{\mathsf{DG},\Omega_h}\end{aligned}$$

# 誤差評価

## 略証) Step. 2

$$\|I_h u - R_h u\|^2_{\mathsf{DG},\Omega} \le a_\Omega(u - R_h u, I_h u - R_h u) - a_\Omega(u - I_h u, I_h u - R_h u)$$

であり，Young の不等式より，

$$\|I_h u - R_h u\|^2_{\mathsf{DG},\Omega} \le Ch^2 + Ca_\Omega(u - R_h u, I_h u - R_h u)$$

となる． $v_h^l = I_h u - R_h u \in V_h^l$ とすると，

$$\begin{aligned} a_\Omega(u - R_h u, I_h u - R_h u) &= a_{\Omega_h}(\widetilde{R}_h u, v_h) - a_\Omega(R_h u, v_h^l) \\ &\le C(h\|R_h u\|_{\mathcal{B}_h^l,\mathcal{J}_h}\|v_h^l\|_{\mathcal{B}_h^l,\mathcal{J}_h} + h^2\|R_h u\|_{\mathcal{E}_h^l,\mathcal{R}_h}\|v_h^l\|_{\mathcal{E}_h^l,\mathcal{R}_h}) \end{aligned}$$

となる．

## 略証) Step. 3

多項式についての逆不等式より，
$N(\mathcal{B}_h^l) = \{K^l \in \mathcal{T}_h^l : E \subset \partial K^l$ となる $E \in \mathcal{J}_h^l$ が存在 $\}$ とすると，

$$
\begin{aligned}
\|R_h u\|_{\mathcal{B}_h^l, \mathcal{J}_h} \|v_h^l\|_{\mathcal{B}_h^l, \mathcal{J}_h} &\le C \sum_{K^l \in N(\mathcal{B}_h^l)} |R_h u|_{H^1(K^l)} |v_h^l|_{H^1(K^l)} \\
&\le C \sum_{K^l \in N(\mathcal{B}_h^l)} (|u|_{H^1(K^l)} + |u - R_h u|_{H^1(K^l)})(|u - R_h u|_{H^1(K^l)} + |u - I_h u|_{H^1(K^l)}) \\
&\le C \sum_{K^l \in N(\mathcal{B}_h^l)} (|u|^2_{H^1(K^l)} + |u - R_h u|^2_{H^1(K^l)} + |u - I_h u|^2_{H^1(K^l)}) \\
&\le C(\|I_h u - R_h u\|^2_{\mathsf{DG},\Omega} + h^2) + Ch\|u\|_{H^2(\Omega)} \qquad (\because \ \text{ER13, Lemma 6.3})
\end{aligned}
$$

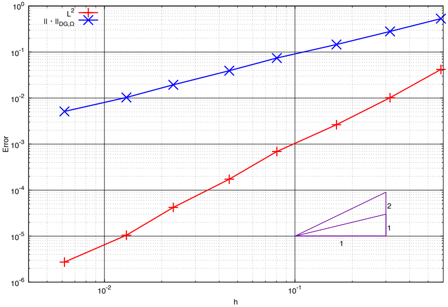
となる．同様に評価することで，

$$
\begin{aligned}
&a_\Omega(u - R_h u, I_h u - R_h u) \\
&\le Ch(\|I_h u - R_h u\|^2_{\mathsf{DG},\Omega} + h^2) + Ch^2(\|u\|_{H^2(\Omega)} + \|u\|_{H^2(\Gamma)})
\end{aligned}
$$

# 5．数値計算

# 数値計算

$\Omega = \{|x| < 1\} \subset \mathbb{R}^2$，厳密解 $u(x) = \exp(-|x|^2)$

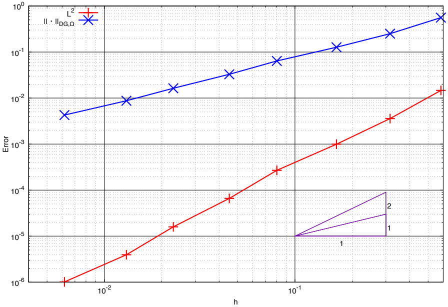



(a) P1 要素

図: エネルギーノルム及び $L^2$ ノルムの誤差

エネルギーノルムが $O(h)$，$L^2$ ノルムが $O(h^2)$

$\Omega = \{|x| < 1\} \subset \mathbb{R}^2$，厳密解 $u(x) = \sin(x_1)\sin(x_2)$

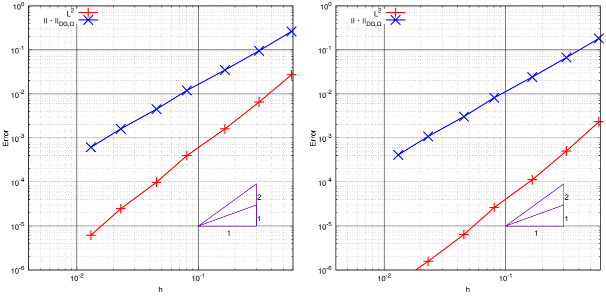



(a) P1 要素

図: エネルギーノルム及び $L^2$ ノルムの誤差

エネルギーノルムが $O(h)$，$L^2$ ノルムが $O(h^2)$

同様の計算を P2 要素でも行った.




(a) 球対称　　(b) 非球対称

図: エネルギーノルム及び $L^2$ ノルムの誤差

エネルギーノルムが $O(h^{1.5})$, $L^2$ ノルムが $O(h^2)$

# 結論

滑らかな領域上の一般化 Robin 境界条件を持つ Poisson 方程式に対する，P1 要素を用いた DG 法について，エネルギーノルムによる誤差評価を得た．

## 今後の課題

- $L^2$ ノルムや $L^\infty$ ノルムといった，他のノルムによる評価
- 3 次元領域に対しての本手法の適用
- 動的境界条件に対して，本手法の適用