

滑らかな領域上の Robin 境界条件を持つ Poisson 方程式に対する不連続 Galerkin 法

千葉悠喜

東京大学大学院数理科学研究科

日本数学会 2019 年度年会

東京工業大学

2019 年 3 月 17 日

目次

1. はじめに
2. モデル方程式とスキーム
3. スキームの解析
4. 数値計算

1. はじめに

はじめに

滑らかな領域における数値計算

- ▶ 有限要素法では領域を多角形や多面体で近似して計算を行っている。

→ 問題の近似の仕方によっては元の問題と異なる問題の近似解を求めてしまうことがある (e.g. Babuška のパラドックス)

境界条件

- ▶ 一般化 Robin 境界条件や動的境界条件といった、境界条件に Laplace-Beltrami 作用素を含む方程式は、reduced-FSI モデルといった、物理学への応用を考える上で重要。

→ 境界条件に接方向の微分が含まれる

滑らかな領域における、複雑な境界条件を持つ問題の数値計算は特に注意が必要

はじめに

標準的な有限要素法

滑らかな領域に対する研究も盛ん

動的境界条件についての研究も行われている。(Kovács & Lubich(2017))

DG 法, HDG 法については, そのような研究はそこまで行われていない.

最終目標: reduced-FSI モデルへの DG 法の適用

滑らかな領域上の Robin 境界条件を持つ Poisson 方程式に対する, DG 法の適用とその解析

関連する先行研究

- ▶ Barrett & Elliott(1988)
滑らかな領域上の Neumann, Robin 境界条件に対する標準的な有限要素法
- ▶ Juntunen & Stenberg(2008)
多角形領域上の Neumann, Robin 境界条件に対する Nitsche 法

2. モデル方程式とスキーム

Poisson 方程式

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} + \frac{1}{\varepsilon} u = \frac{1}{\varepsilon} u_0 + g & \text{on } \Gamma \end{cases} \quad (1)$$

$\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ($d = 2$ または 3), 境界 $\Gamma = \partial\Omega$ は十分滑らか
 $f \in L^2(\Omega)$, $u_0 \in H^{3/2}(\Gamma)$, $g \in H^{1/2}(\Gamma)$
 $0 < \varepsilon < \infty$, ν : 外向き単位法線ベクトル

$\varepsilon \rightarrow 0$: Diriclet 境界条件, $\varepsilon \rightarrow \infty$: Neumann 境界条件

$\mathcal{T}_h : \Omega_h$ の正則な三角形分割, $\Omega_h = \text{int}(\cup_{K \in \mathcal{T}_h} \overline{K})$, $\Gamma_h = \partial\Omega_h$
 $\overline{\mathcal{T}}_h : K \in \mathcal{T}_h$ の辺全体, $\mathcal{E}_h = \{R \in \overline{\mathcal{T}}_h : E \subset \Gamma_h\} : \Gamma_h$ の正則な三角形分割
 $E \in \mathcal{E}_h$ の頂点がすべて Γ 上にあると仮定する.
 h を十分小さくすることで以下が成り立つ.

局所座標系 $\{(U_r, y_r, \phi_r)\}_{r=1}^M$ が存在し, 次を満たす.

- (1) $\{U_r\}$ は $\Gamma = \partial\Omega$ の開被覆である.
- (2) $y_r = (y_{r1}, \dots, y_{rd-1}, y_{rd}) = (y'_r, y_{rd})$ は元の座標 x に合同変換を作用させたものである.
- (3) $\Delta_r := \{y'_r \in R^{d-1} : |y'_r| < \alpha\}$ 上で ϕ_r は滑らかであり, そのグラフは $\Gamma \cap U_r$ である.
- (4) $r = 1, \dots, M$ に対し, $\Gamma_h \cap U_r$ のグラフになるような関数 ϕ_{rh} が存在する.

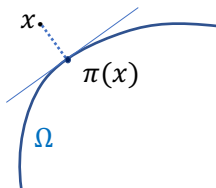
準備-領域

Γ との符号付き距離関数 $d(x)$ を次のように定める.

$$d(x) = \begin{cases} -\text{dist}(x, \Gamma) & \text{if } x \in \Omega \\ \text{dist}(x, \Gamma) & \text{if } x \in \Omega^c \end{cases}$$

$\Gamma(\delta) := \{x \in \mathbb{R}^d : |d(x)| < \delta\}$ とする. δ が十分小さいならば, 次を満たす直交射影 $\pi: \Gamma(\delta) \rightarrow \Gamma$ が存在する.

$$x = \pi(x) + d(x)\nu(\pi(x))$$



h を十分小さくすることで, $\pi|_{\Gamma_h}$ は逆写像 $\pi^*(x) = x + t^*(x)\nu(x)$ を持ち, $\|t^*\|_{L^\infty(\Gamma)} \leq C_{0E}h^2$ となる.

補題 1 (Boundary-skin 評価 (Kashiwabara-Oikawa-Zhou(2016), Kashiwabara-Kemmochi(preprint)))

$C_{0E}h^2 \leq \delta \leq 2C_{0E}h^2$ に対し, 以下が成り立つ.

$$\left| \int_{\pi(E)} f d\gamma - \int_E f \circ \pi d\gamma_h \right| \leq Ch^2 \int_{\pi(E)} |f| d\gamma \quad f \in L^1(\pi(E)), E \in \mathcal{E}_h \quad (2)$$

$$\|f - f \circ \pi\|_{L^p(\Gamma_h)} \leq C\delta^{1-1/p} \|f\|_{W^{1,p}(\Gamma(\delta))} \quad f \in W^{1,p}(\Gamma(\delta)) \quad (3)$$

$$\|f\|_{L^p(\Gamma(\delta))} \leq C(\delta \|\nabla f\|_{L^p(\Gamma(\delta))} + \delta^{1/p} \|f\|_{L^p(\Gamma)}) \quad f \in W^{1,p}(\Gamma(\delta)) \quad (4)$$

$$\|f\|_{L^p(\Omega_h \setminus \Omega)} \leq C(\delta \|\nabla f\|_{L^p(\Omega_h \setminus \Omega)} + \delta^{1/p} \|f\|_{L^p(\Gamma_h)}) \quad f \in W^{1,p}(\Omega_h) \quad (5)$$

$$\|\nu_h - \nu \circ \pi\|_{L^\infty(\Gamma_h)} \leq Ch \quad (6)$$

ν_h : Γ_h の外向き単位法線ベクトル

滑らかな領域 $\tilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^d$ を $\Omega, \Omega_h, \Gamma(C_{0E}h^2)$ を含むように選び,

$P: H^s(\Omega) \rightarrow H^s(\tilde{\Omega})$ を有界な拡張作用素とする.

$\tilde{f} = Pf$ とし, u_0, g はそれぞれ $\tilde{\Omega}$ 上の関数 \tilde{u}_0, \tilde{g} の Γ への制限であるとする.

有限要素空間 V_{DG}

$$V_{DG} := \{\chi \in L^2(\Omega) : \chi|_K \in \mathcal{P}^1(K) \forall K \in \mathcal{T}_h\}$$

このとき, 射影 $\Pi_{DG}: H^2(\Omega_h) \rightarrow V_{DG}$ が存在し,

$K \in \mathcal{T}_h, m = 0, 1, 2, w \in H^2(K)$ に対し, 次を満たす.

$$\|w - \Pi_{DG}w\|_{H^m(K)} \leq Ch^{2-m} \|w\|_{H^2(K)}$$

$$\mathcal{I}_h = \{E \in \overline{\mathcal{T}}_h : E \not\subset \Gamma_h\} = \overline{\mathcal{T}}_h \setminus \mathcal{E}_h$$

$v \in H^s(\Omega_h) + V_{DG}$ と $E \in \mathcal{I}_h$ に対し, $\{\cdot\}$ および $[\cdot]$ を以下のように定める.

$$\{\{v\}\} := \frac{1}{2}(v_1 + v_2), \quad [v] := v_1 n_1 + v_2 n_2,$$

$$\{\{\nabla v\}\} := \frac{1}{2}(\nabla v_1 + \nabla v_2), \quad [\nabla v] := \nabla v_1 \cdot n_1 + \nabla v_2 \cdot n_2$$

$E = \overline{K}_1 \cap \overline{K}_2$ を満たす相異なる $K_1, K_2 \in \mathcal{T}_h$, $v_i = v|_{K_i}$
 $n_i : E$ 上の K_i に関する外向き単位法線ベクトル

また, $E \in \mathcal{E}_h$ に対し, $\{\{\nabla v\}\} = \frac{\partial v}{\partial \nu_h}$ とする.

DG 法

$$\text{Find } u_{DG} \in V_{DG} \quad \text{s.t.} \quad a_h^{DG}(u_{DG}, \chi) = l_h(\chi) \quad \forall \chi \in V_{DG} \quad (7)$$

$$a_h^{DG}(w, v) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} (\nabla w, \nabla v)_K + b_h(w, v) + J_h(w, v)$$

$$b_h(w, v) = \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \left\{ -\frac{\gamma h_E}{\varepsilon + \gamma h_E} \left(\left\langle \frac{\partial w}{\partial \nu_h}, v \right\rangle_E + \left\langle w, \frac{\partial v}{\partial \nu_h} \right\rangle_E \right) \right. \\ \left. + \frac{1}{\varepsilon + \gamma h_E} \langle w, v \rangle_E - \frac{\varepsilon \gamma h_E}{\varepsilon + \gamma h_E} \left\langle \frac{\partial w}{\partial \nu_h}, \frac{\partial v}{\partial \nu_h} \right\rangle_E \right\}$$

$$J_h(w, v) = \sum_{E \in \mathcal{I}_h} \left\{ -\langle \{\{\nabla w\}\}, [v] \rangle_E - \langle [w], \{\{\nabla v\}\} \rangle_E + \frac{1}{\gamma h_E} \langle [w], [v] \rangle_E \right\}$$

$$l_h(v) = (\tilde{f}, v)_{\Omega_h} + \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \left\{ \frac{1}{\varepsilon + \gamma h_E} \left\langle \tilde{u}_0 + \varepsilon \tilde{g}, v - \gamma h_E \frac{\partial v}{\partial \nu_h} \right\rangle_E \right\}$$

$h_E = \text{diam } E$, $\gamma > 0$: 十分小さな定数

3. スキームの解析

双線形形式の性質

$H^s(\Omega_h) + V_{DG}$ ($s > 3/2$) に対し, 以下の2つのノルムを定める.

$$\|v\|_{DG}^2 := \|\nabla v\|_{L^2(\Omega_h)}^2 + \sum_{E \in \mathcal{I}_h} \frac{1}{h_E} \|[[v]]\|_{L^2(E)}^2 + \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \frac{1}{\varepsilon + h_E} \|v\|_{L^2(E)}^2$$

$$\|v\|_{DG,h}^2 := \|v\|_{DG}^2 + \sum_{E \in \mathcal{I}_h \cup \mathcal{E}_h} h_E \|\{\{\nabla v\}\}\|_{L^2(E)}^2.$$

補題 2 (連続性, 強圧性)

$$a_h^{DG}(w, v) \leq C \|w\|_{DG,h} \|v\|_{DG,h} \quad \forall w, v \in H^s(\Omega_h) + V_{DG}.$$

が成り立つ. さらに, γ が十分小さいならば,

$$a_h^{DG}(\chi, \chi) \geq C \|\chi\|_{DG}^2 \quad \forall \chi \in V_{DG}.$$

が成り立つ.

一般に, $u \notin H^s(\Omega_h)$ であり, $\tilde{u} = Pu$ としても, $a_h(\tilde{u}, v) \neq l_h(v)$ である.

補題 3

$u \in H^2(\Omega)$, $u_{DG} \in V_{DG}$ をそれぞれ (1), (7) の解とする. このとき, γ が十分小さいならば, 以下が成り立つ.

$$\|\tilde{u} - u_{DG}\|_{DG,h} \leq C \left[\inf_{\xi \in V_{DG}} \|\tilde{u} - \xi\|_{DG,h} + \sup_{\chi \in V_{DG}} \frac{|a_h^{DG}(\tilde{u}, \chi) - l_h(\chi)|}{\|\chi\|_{DG}} \right] \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \|\tilde{u} - u_{DG}\|_{L^2(\Omega_h)} \leq C & \left[\|\tilde{u} - u_{DG}\|_{L^2(\Omega_h \setminus \Omega)} + h \|\tilde{u} - u_{DG}\|_{DG,h} \right. \\ & + \sup_{z \in H^2(\Omega)} \left(\frac{\|\tilde{z} - \Pi_{DG}\tilde{z}\|_{DG,h} \|\tilde{u} - u_{DG}\|_{DG,h}}{\|z\|_{H^2(\Omega)}} \right. \\ & \left. \left. + \frac{|a_h^{DG}(\tilde{u}, \Pi_{DG}\tilde{z}) - l_h(\Pi_{DG}\tilde{z})|}{\|z\|_{H^2(\Omega)}} \right) \right] \quad (9) \end{aligned}$$

ただし, $\tilde{u} = Pu$, $\tilde{z} = Pz$ である.

略証. Step 1

$\xi \in V_{DG}$ とし, $\chi = u_{DG} - \xi$ とする. 双線形形式の性質より,

$$\begin{aligned}\|\chi\|_{DG}^2 &\leq C a_h^{DG}(\chi, \chi) = C(l_h(\chi) - a_h^{DG}(\xi, \chi)) \\ &= C(a_h^{DG}(\tilde{u} - \xi, \chi) - a_h^{DG}(\tilde{u}, \chi) + l_h(\chi)) \\ &\leq C \|\tilde{u} - \xi\|_{DG,h} \|\chi\|_{DG} + |a_h^{DG}(\tilde{u}, \chi) - l_h(\chi)|\end{aligned}$$

多項式に対する逆不等式と三角不等式より, (8) が成り立つ.

略証. Step 2

$\eta \in L^2(\Omega_h)$ とし, $\tilde{\eta} \in L^2(\tilde{\Omega})$ を 0 拡張とする. $z \in H^2(\Omega)$ を

$$\begin{cases} -\Delta z = \tilde{\eta} & \text{in } \Omega \\ \frac{\partial z}{\partial \nu} + z/\varepsilon = 0 & \text{on } \Gamma \end{cases}$$

の解とする.

$$\begin{aligned} (\tilde{u} - u_{DG}, \eta)_{\Omega_h} &= a_h^{DG}(\tilde{u} - u_{DG}, \tilde{z} - \Pi_{DG}\tilde{z}) \\ &\quad + a_h^{DG}(\tilde{u}, \Pi_{DG}\tilde{z}) - l_h(\Pi_{DG}\tilde{z}) + (\tilde{u} - u_{DG}, \eta + \Delta\tilde{z})_{\Omega_h \setminus \Omega} \\ &\quad - \sum_{E \in E_h} \left[\frac{\varepsilon}{\varepsilon + \gamma h_E} \left\langle \frac{\partial \tilde{z}}{\partial \nu_h} + \frac{\tilde{z}}{\varepsilon}, (1 - \gamma h_E \frac{\partial}{\partial \nu_h})(\tilde{u} - u_{DG}) \right\rangle_E \right] \end{aligned}$$

Boundary-skin 評価より, 3 行目を $h \|\tilde{u} - u_{DG}\|_{DG,h} \|\eta\|_{L^2(\Omega_h)}$ で上から評価でき, 他の評価と合わせて (9) が得られる.

定理 1

$u \in H^s(\Omega)$ を (1) の解とする. Ω が凸ならば $s = 2$, そうでないならば $s = 3$ とする. $u_{DG} \in V_{DG}$ を (7) の解とする. このとき, γ が十分小さいならば, 以下が成り立つ.

$$\|\tilde{u} - u_{DG}\|_{DG,h} \leq Ch(\|u\|_{H^s(\Omega)} + \|\tilde{u}_0\|_{H^1(\tilde{\Omega})} + \|\tilde{g}\|_{H^1(\tilde{\Omega})})$$

ただし, $\tilde{u} = Pu$ である.

略証. Step 1

$|a_h(\tilde{u}, \chi) - l_h(\chi)|$ を評価すればよい.

$$\begin{aligned} |a_h(\tilde{u}, \chi) - l_h(\chi)| &\leq |(-\Delta\tilde{u} - \tilde{f}, \chi)_{\Omega_h}| \\ &\quad + \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \frac{\varepsilon}{\varepsilon + \gamma h_E} \left| \left\langle \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \nu_h} + \frac{\tilde{u} - \tilde{u}_0}{\varepsilon} - \tilde{g}, \chi - \gamma h_E \frac{\partial \chi}{\partial \nu_h} \right\rangle_E \right| \end{aligned}$$

略証. Step 2

Ω が凸ならば, $\Omega_h \subset \Omega$ であるから, $|(-\Delta \tilde{u} - \tilde{f}, \chi)_{\Omega_h}| = 0$ となり, 非凸ならば, $|(-\Delta \tilde{u} - \tilde{f}, \chi)_{\Omega_h}| \leq Ch^2 \|u\|_{H^3(\Omega)} \|\chi\|_{DG,h}$ となる. Boundary-skin 評価より.

$$\begin{aligned} & \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \frac{\varepsilon}{\varepsilon + \gamma h_E} \left| \left\langle \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \nu_h} + \frac{\tilde{u} - \tilde{u}_0}{\varepsilon} - \tilde{g}, \chi - \gamma h_E \frac{\partial \chi}{\partial \nu_h} \right\rangle_E \right| \\ & \leq C \left\| \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \nu_h} + \frac{\tilde{u} - \tilde{u}_0}{\varepsilon} - \tilde{g} \right\|_{L^2(\Gamma_h)} \|\chi\|_{DG,h} \\ & \leq Ch (\|u\|_{H^2(\Omega)} + \|\tilde{u}_0\|_{H^1(\tilde{\Omega})} + \|\tilde{g}\|_{H^1(\tilde{\Omega})}) \|\chi\|_{DG,h} \end{aligned}$$

となり, (1) が成り立つ.

系 1

$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^d: |x| < 1\}$ とする. $u_0 \in H^{1+3/2}(\Gamma)$, $g \in H^{1+1/2}(\Gamma)$ とし, (1) の解 $u \in H^3(\Omega)$ が球対称であるとする. $V_{DG,2}$ を区分的二次多項式からなる有限要素空間とし, $u_{DG} \in V_{DG,2}$ を以下の解とする.

$$a_h^{DG}(u_{DG}, \chi) = l_h(\chi) \quad \forall \chi \in V_{DG,2} \quad (10)$$

このとき, γ が十分小さいならば, 以下が成り立つ.

$$\|\tilde{u} - u_{DG}\|_{DG,h} \leq Ch^2(\|u\|_{H^3(\Omega)} + \|\tilde{u}_0\|_{H^2(\tilde{\Omega})} + \|\tilde{g}\|_{H^2(\tilde{\Omega})}) \quad (11)$$

ただし, $\tilde{u} = Pu$ である.

略証. Step 1

今までの証明と同様にして,

$$\|\tilde{u} - u_{DG}\|_{DG,h} \leq C \left[h^2 \|u\|_{H^3(\Omega)} + \sup_{\chi \in V_{DG,2}} \frac{|a_h^{DG}(\tilde{u}, \chi) - l_h(\chi)|}{\|\chi\|_{DG}} \right]$$

および,

$$\begin{aligned} |a_h^{DG}(\tilde{u}, \chi) - l_h(\chi)| &\leq C \|\nabla u \cdot \nu_h - \nabla(u \circ \pi) \cdot (\nu \circ \pi)\|_{L^2(\Gamma_h)} \|\chi\|_{DG,h} \\ &\quad + Ch^2 (\|u\|_{H^2(\Omega)} + \|\tilde{u}_0\|_{H^2(\tilde{\Omega})} + \|\tilde{g}\|_{H^2(\tilde{\Omega})}) \|\chi\|_{DG,h} \end{aligned}$$

となる.

仮定より, $x \in \Omega$ に対し, $U(|x|) = u(x)$ となる関数 U が存在する.

$x \in \Gamma_h$ に対し, $0 \leq \alpha(x) < 1$ を, $\cos \alpha(x) = \nu_h(x) \cdot (\nu \circ \pi(x))$ を満たすように定める.

略証. Step 2

このとき,

$$\pi(x) = \frac{x}{|x|}, \quad \nabla u = U'(|x|x), \quad \nu(x) = x, \quad 1 - \cos \alpha(x) \leq Ch^2,$$

$$\nabla u \cdot \nu_h = U'(|x|) \cos \alpha(x), \quad \nabla(u \circ \pi) \cdot (\nu \circ \pi) = U'(1)$$

となる。したがって,

$$\begin{aligned} & \|\nabla u \cdot \nu_h - \nabla(u \circ \pi) \cdot (\nu \circ \pi)\|_{L^2(\Gamma_h)}^2 \\ & \leq \int_{\Gamma_h} |U'(|x|) - U'(1)|^2 d\gamma_h + |U'(1)|^2 \int_{\Gamma_h} |1 - \cos \alpha(x)|^2 d\gamma_h \\ & \leq C_0 h^2 \int_{\Gamma_h} \int_{1-C_0 h^2}^1 |U''(s)|^2 ds d\gamma_h + C |U'(1)|^2 h^4 \\ & \leq Ch^4 \|u\|_{H^2(\Omega)}^2 \end{aligned}$$

定理 2

$u_0 \in H^{2+3/2}(\Gamma)$, $g \in H^{2+1/2}(\Gamma)$ とし, $u \in H^4(\Omega)$ を (1) の解とする.
 $u_{DG} \in V_{DG}$ を (7) の解とする. このとき, γ が十分小さいならば, 以下が成り立つ.

$$\|\tilde{u} - u_{DG}\|_{L^2(\Omega_h)} \leq Ch^2(\|u\|_{H^4(\Omega)} + \|\tilde{u}_0\|_{H^3(\tilde{\Omega})} + \|\tilde{g}\|_{H^3(\tilde{\Omega})}).$$

ただし, $\tilde{u} = Pu$ である.

略証.

$b_h(w, v), l_h(v)$ において, $(\cdot, \cdot)_{\Omega_h}, \frac{\partial}{\partial \nu_h}, \langle \cdot, \cdot \rangle_E$ を, それぞれ, $(\cdot, \cdot)_{\Omega}, \frac{\partial}{\partial \nu}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\pi(E)}$ としたものを $b(w, v), l(v)$ として定め, $a(w, v) = (\nabla w, \nabla v)_{\Omega} + b(w, v)$ とする. このとき, $v \in H^s(\Omega) + V_{DG}$ に対し, $a(u, v) = l(v)$ が成り立つ.

\tilde{u}, \tilde{z} は Ω_h 上連続であるから, $J_h(\tilde{u}, \tilde{z}) = 0$ となる. したがって,

$$\begin{aligned} a_h^{DG}(\tilde{u}, \Pi_{DG}\tilde{z}) - l_h(\Pi_{DG}\tilde{z}) &= a_h^{DG}(\tilde{u}, \Pi_{DG}\tilde{z} - \tilde{z}) - l_h(\Pi_{DG}\tilde{z} - \tilde{z}) \\ &\quad + a_h^{DG}(\tilde{u}, \tilde{z}) - a(u, z) + l(z) - l_h(\tilde{z}) \end{aligned}$$

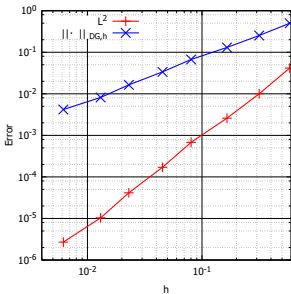
となり, 1 行目は補間誤差評価と合わせて求めたい評価が得られる.

2 行目を整理すると, $\int_{\Omega_h \setminus \Omega} \tilde{z} dx, \int_{\Omega \setminus \Omega_h} \tilde{z} dx, \int_E \tilde{z} d\gamma - \int_{\pi(E)} \tilde{z} d\gamma$ といった項が現れる. Boundary-skin 評価より求めたい評価が得られる.

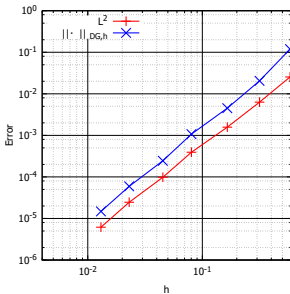
4 . 数値計算

数値計算

$\Omega = \{|x| < 1\} \subset \mathbb{R}^2$, 厳密解 $u(x) = \exp(-|x|^2)$ (球対称)



(a) P1 要素



(b) P2 要素

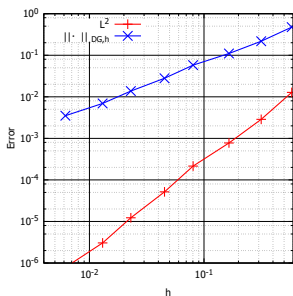
図: エネルギーノルム及び L^2 ノルムの誤差

P1 要素: エネルギーノルムが $O(h)$, L^2 ノルムが $O(h^2)$

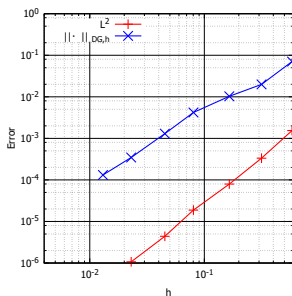
P2 要素: どちらも $O(h^2)$

数値計算

$\Omega = \{|x| < 1\} \subset \mathbb{R}^2$, 厳密解 $u(x) = \sin(x_1) \sin(x_2)$ (球対称ではない)



(a) P1 要素



(b) P2 要素

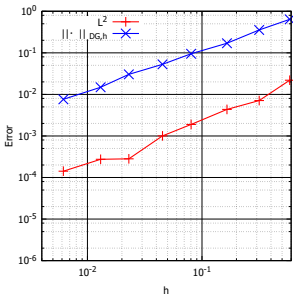
図: エネルギーノルム及び L^2 ノルムの誤差

P1 要素: エネルギーノルムが $O(h)$, L^2 ノルムが $O(h^2)$

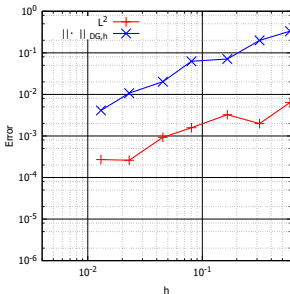
P2 要素: エネルギーノルムが $O(h^{1\sim 2})$, L^2 ノルムが $O(h^2)$

数値計算

$$\Omega = \{|x| < 1\} \subset \mathbb{R}^2, \text{ 厳密解 } u(x) = \sqrt{(x_1 + 1)^2 + x_2^2} \quad (u \notin H^4)$$



(a) P1 要素



(b) P2 要素

⊠: エネルギーノルム及び L^2 ノルムの誤差

P1 要素: どちらも $O(h)$

P2 要素: どちらも $O(h)$

滑らかな領域上の Robin 境界条件を持つ Poisson 方程式に対する P1 要素を用いた DG 法について、エネルギーノルム、 L^2 ノルムによる誤差評価を得た。

さらに、適当な仮定の下で、P2 要素を用いた DG 法について、エネルギーノルムによる誤差評価を得た。

今後の課題

- ▶ 一般化 Robin 境界条件や、その時間発展である動的境界条件に対して、本手法の適用

定理 2 の証明の補足

$$\begin{aligned}
 & a_h^{DG}(\tilde{u}, \tilde{z}) - a(u, z) + l(z) - l_h(\tilde{z}) \\
 &= \int_{\Omega_h \setminus \Omega} (\nabla \tilde{u} \cdot \nabla \tilde{z} - \tilde{f} \tilde{z}) dx - \int_{\Omega \setminus \Omega_h} (\nabla u \cdot \nabla z - fz) dx \\
 &+ \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \frac{1}{\varepsilon + \gamma h_E} \left[\left\langle -\gamma h_E \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \nu_h} + \tilde{u} - \tilde{u}_0 - \varepsilon \tilde{g}, \tilde{z} \right\rangle_E \right. \\
 &\quad - \left\langle -\gamma h_E \frac{\partial u}{\partial \nu} + u - u_0 - \varepsilon g, z \right\rangle_{\pi(E)} \\
 &\quad \left. - \gamma h_E \left\langle \varepsilon \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \nu_h} + \tilde{u} - \tilde{u}_0 - \varepsilon \tilde{g}, \frac{\partial \tilde{z}}{\partial \nu_h} \right\rangle_E \right]
 \end{aligned}$$