抽象的放物型方程式に対する DG time-stepping 法とその応用

千葉悠喜

東京大学大学院数理科学研究科

日本応用数理学会第 21 回研究部会連合発表会
岡山大学
2025 年 3 月 5 日

目次

1．はじめに

DG time-stepping 法

DG time-stepping 法 (Lasaint & Raviart (1974))

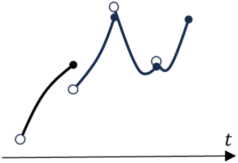
時間方向の離散化に不連続 Galerkin 法を適用した手法
高精度化が容易，領域が変形する問題に強い．

昨年の研究部会連合発表会：滑らかな領域上の動的境界条件の誤差評価
利用した双線形形式の性質を抽象化することで多くの方程式に適用

抽象的な放物型発展方程式の DG time-stepping 法

抽象的な放物型発展方程式とその近似問題を考え，DG time-stepping 法の誤差解析を行う．
応用例：滑らかな領域上の問題に適用する．

参考文献
空間: Elliott & Ranner (2021)
時間: N. Saito (2021)



2．抽象的なモデル方程式とスキーム

モデル方程式

$V \overset{\text{dence}}{\subset} H$: Hilbert 空間，$(\cdot,\cdot)_H$: H の内積，$\|\cdot\|_V, \|\cdot\|_H$: V, H のノルム
このとき，

$$V \subset H \simeq H' \subset V'$$

である．ただし，$\langle w, v\rangle = {}_{V'}\langle w, v\rangle_V = (w, v)_H \, (v \in V, w \in H)$ である．
$t \in J = (0, T)$ に対し，$A(t) \colon V \to V'$ を次を満たす線形写像とする．

$$|\langle A(t)v, w\rangle| \leq M\|v\|_V\|w\|_V \qquad (v, w \in V, t \in J) \tag{1}$$

$$\langle A(t)v, v\rangle \geq \alpha\|v\|_V^2 \qquad (v \in V, t \in J) \tag{2}$$

$a(t; v, w) = \langle A(t)v, w\rangle$ とおけば，$a(t; \cdot, \cdot)$ は t について一様に有界かつ強圧的である．

モデル方程式

$F \in L^2(J, V'), u_0 \in H$ に対し，次の問題を考える．

$$\partial_t u + A(t)u = F(t) \quad (t \in J) \tag{3a}$$
$$u(0) = u_0 \tag{3b}$$

(3) に $v \in L^2(J, V)$ を作用させ，t で積分することで次が得られる．

Find $u \in L^2(J, V) \cap H^1(J, V')$ s.t.

$$B(u, v) = \int_J \langle F(t), v_1(t) \rangle \, dt + (u_0, v_2)_H \quad (v = (v_1, v_2) \in L^2(J, V) \times H) \tag{A}$$

ただし，

$$B(w, v) = \int_J (\langle \partial_t w(t), v_1(t) \rangle + a(t; w(t), v_1(t))) \, dt + (w(0), v_2)_H$$

である．Banach–Nečas–Babuška の定理より，(A) の解は一意に存在する．

V の近似

$\{V_h\}_h$: 有限次元線形空間の族，$(\cdot,\cdot)_h$: 内積，$\|\cdot\|_{V_h}, \|\cdot\|_h$:ノルム，
$\langle\cdot,\cdot\rangle_h = {}_{V_h'}\langle\cdot,\cdot\rangle_{V_h}$
$t \in J$ に対し，$A_h(t)\colon V_h \to V_h'$ を次を満たす線形写像とする．

$$|\langle A_h(t)v_h, w_h\rangle_h| \le M'\|v_h\|_{V_h}\|w_h\|_{V_h} \qquad (v_h, w_h \in V_h, t \in J) \tag{4}$$

$$\langle A_h(t)v_h, v_h\rangle_h \ge \alpha'\|v_h\|_{V_h}^2 \qquad (v_h \in V_h, t \in J) \tag{5}$$

$a_h(t; w, v) = \langle A_h(t)w, v\rangle_h$ とする．次の問題を考える．

Find $u_h \in H^1(J, V_h)$ s.t.

$$(\partial_t u_h, v_h)_h + a_h(t; u_h, v_h) = \langle F_h(t), v_h\rangle_h \quad (v_h \in V_h) \tag{B-1}$$

$$(u_h(0), v_h)_h = (I_h u_0, v_h)_h \quad (v_h \in V_h) \tag{B-2}$$

ただし，$F_h \in L^2(J, V_h'), I_h \in \mathcal{L}(H, V_h)$ である．
この問題の解は一意に存在する．

時間分割

$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n < \cdots < t_N = T$，$J_n = (t_n, t_{n+1}]$ とし，
$\tau_n = t_{n+1} - t_n$ とする．$\Delta_\tau = \{J_n\}_{n=0}^{N-1}$，$\tau = \max_{0\le n\le N-1} \tau_n \le 1$ とする．

有限要素空間

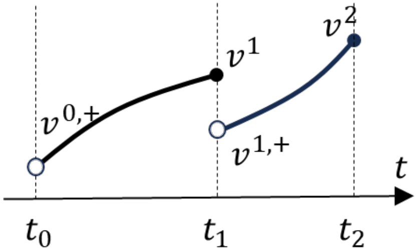
各 J_n 上で q 次以下の多項式となる V_h-valued な関数空間

$$\mathscr{S}_{h\tau} = \{v_{h\tau} \in \underbrace{C^0(\Delta_\tau, V_h)}_{\text{区分連続}} : v_{h\tau}|_{J_n} \in \underbrace{\mathscr{P}^q(J_n, V_h)}_{J_n\ \text{上多項式}},\ 0 \le n \le N-1\}$$

$v \in C^0(\Delta_\tau, X)$ と
$n = 0, 1, \ldots, N-1$ に対し，

$$v^{n,+} = \lim_{t\downarrow t_n} v(t), \qquad v^{n+1} = v(t_{n+1})$$

を定める．



DG time-stepping スキーム

双線形形式 $B_{h\tau}\colon \mathscr{S}_{h\tau} \times \mathscr{S}_{h\tau} \to \mathbb{R}$ を次で定める.

$$\begin{aligned} B_{h\tau}(w_{h\tau}, v_{h\tau}) = \sum_{n=0}^{N-1} \int_{J_n} [(\partial_t w_{h\tau}, v_{h\tau})_h + a_h(t; w_{h\tau}, v_{h\tau})]\, dt \\ + (w_{h\tau}^{0,+}, v_{h\tau}^{0,+})_h + \sum_{n=1}^{N-1} (w_{h\tau}^{n,+} - w_{h,\tau}^{n}, v_{h\tau}^{n,+})_h \end{aligned} \tag{6}$$

DG time-stepping スキーム

Find $u_{h\tau} \in \mathscr{S}_{h\tau}$ s.t.

$$B_{h\tau}(u_{h\tau}, v_{h\tau}) = \sum_{n=0}^{N-1} \int_{J_n} \langle F_h(t), v_{h\tau} \rangle_h \, dt + (I_h u_0, v_{h\tau}^{0,+})_h \quad (v_h \in \mathscr{S}_{h\tau}) \tag{C}$$

このスキームの解 $u_{h\tau} \in \mathscr{S}_{h\tau}$ は一意に存在する.

3．抽象的な問題の誤差解析

V の近似の仮定 (cf. Elliot, Ranner (2021))

線形写像 $L_h\colon V_h \to V$ を考え，$v_h \in V_h$ に対し，$v_h^l = L_h(v)$ とする．以下の意味で L_h が良い近似になっていると仮定する．

近似の仮定

$$\frac{1}{c}\|v_h^l\|_V \le \|v_h\|_{V_h} \le c\|v_h^l\|_V \quad (v_h \in V_h) \tag{H-1}$$

$$\frac{1}{c}\|v_h^l\|_H \le \|v_h\|_h \le c\|v_h^l\|_H \quad (v_h \in V_h) \tag{H-2}$$

$$|a(t; v_h^l, w_h^l) - a_h(t; v_h, w_h)| \le Ch^k \|v_h^l\|_V \|w_h^l\|_V \quad (v_h, w_h \in V_h) \tag{H-3}$$

$$|(v_h^l, w_h^l)_H - (v_h, w_h)_h| \le Ch^{k+1} \|v_h^l\|_V \|w_h^l\|_V \quad (v_h, w_h \in V_h) \tag{H-4}$$

$$\|v - I_h^l v\|_H + h\|v - I_h^l v\|_V \le Ch^{k+1}\|v\|_W \quad (v \in W) \tag{H-5}$$

k は正整数，$W \subset V$ はノルム $\|\cdot\|_W$ を持つ Banach 空間，$I_h^l v = (I_h v)^l$．

既存の評価

V 上の双線形形式 $\dot{a}(t;\cdot,\cdot)$ を $\dot{a}(t;w,v)=\frac{d}{dt}a(t;w,v)$ で定める．同様に，V_h 上の双線形形式 $\dot{a}_h(t;w,v)=\frac{d}{dt}a_h(t;w,v)$ で定める．$\dot{a},\dot{a}_h$ は t について一様に有界であり，以下を満たすと仮定する．

$$|\dot{a}(t;v_h^l,w_h^l)-\dot{a}_h(t;v_h,w_h)|\le Ch^k\|v_h^l\|_V\|w_h^l\|_V \quad (v_h,w_h\in V_h) \tag{7}$$

また，次を仮定する．

$$\left|\langle F(t),v_h^l\rangle-\langle F_h(t),v_h\rangle_h\right|\le C_Fh^{k+1}\|v_h^l\|_W \quad (v_h\in V_h \text{ with } v_h^l\in W) \tag{8}$$

補題 1 (ER(2021)Thm.3.11)

$u\in H^1(J,W)$，$u_h\in H^1(J,V_h)$ をそれぞれ，(A)，(B) の解とする．(H)，(7)，(8) を仮定する．このとき，h に依存しない正定数 C が存在し，十分小さな h に対し，

$$\begin{aligned}&\|u-u_h^l\|_{L^\infty(J,H)}+\|u-u_h^l\|_{L^2(J,V)}\\&\le Ch^k\big(C_F+\|u\|_{L^\infty(J,W)}+\|\partial_tu\|_{L^2(J,W)}\big)\end{aligned} \tag{9}$$

既存の評価

補題 2 (Saito(2021)Thm2.6)

$u_h \in H^1(J, V_h)$，$u_{h\tau} \in \mathscr{S}_{h\tau}$ をそれぞれ，(B)，(C) の解とする．
$\partial_t^{q+1} u_h \in L^2(J, V_h)$ ならば，h，τ に依存しない正定数 C が存在し，

$$\sup_{1 \le n \le N} \|u_h(t_n) - u_{h\tau}(t_n)\|_h + \|u_h - u_{h\tau}\|_{L^2(J,V_h)} \le C\tau^{q+1} \|\partial_t^{q+1} u_h\|_{L^2(J,V_h)} \tag{10}$$

既存の評価より，

$$\begin{aligned} &\sup_{1 \le n \le N} \|u(t_n) - u_{h\tau}^l(t_n)\|_H + \|u - u_{h\tau}^l\|_{L^2(J,V)} \\ &\le Ch^k(C_F + \|u\|_{L^\infty(J,W)} + \|\partial_t u\|_{L^2(J,W)}) + C\tau^{q+1}\|\partial_t^{q+1} u_h\|_{L^2(J,V_h)} \end{aligned}$$

となる．よって，$\|\partial_t^{q+1} u_h\|_{L^2(J,V_h)}$ を評価すればよい，

Ritz 射影

$t \in J$ に対し，Ritz 射影 $R_h(t)\colon V \to V_h$ を以下を満たすものとして定める．

$$a_h(t; R_h(t)u, v_h) = a(t; u, v_h^l) \quad (v_h \in V_h) \tag{11}$$

$R_h^l u = (R_h u)^l \in V$ とする．(H)，(7) の仮定の下で次の評価が成り立つ．

補題 3 (cf. ER(2011)Lem.3.8,3.10)

$$\begin{aligned}
\|u - R_h^l u\|_V &\le C h^k \|u\|_W & &(u \in W)\\
\|\partial_t R_h^l u(t)\|_V &\le C(\|u(t)\|_V + \|u'(t)\|_V) & &(u \in C^1(J, V))\\
\|\partial_t u(t) - \partial_t R_h^l u(t)\|_V &\le C h^k (\|u(t)\|_W + \|u'(t)\|_W) & &(u \in C^1(J, W))
\end{aligned}$$

a，a_h に追加の仮定を加えると高階微分についても同様の評価が成り立つ．
$\|\partial_t^{q+1} u_h\|_{L^2(J,V_h)} \le C\|\partial_t^{q+1} u_h - \partial_t^{q+1} R_h u\|_{L^2(J,V_h)} + C\|\partial_t^{q+1} u\|_{L^2(J,V)}$ より，$u_h - R_h u$ の時間微分を評価すればよい．$\partial_t^m u_h - \partial_t^m R_h u$ 右辺に $u, R_h u, F, F_h$ とその高階微分の項を持つ方程式を満たす．

誤差評価

$a_h^{(0)} = a_h, a_h^{(m+1)}(t; w_h, v_h) = \frac{d}{dt} a_h^{(m)}(t; w_h, v_h)$ とする．同様に，
$a^{(0)} = a, a^{(m+1)}(t; w, v) = \frac{d}{dt} a^{(m)}(t; w, v)$ とする．$m = 0, 1, \ldots, q+1$ に対し，$a^{(m)}, a_h^{(m)}$ が有界とする．

定理 1

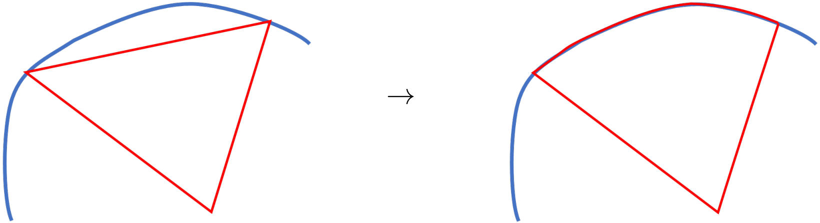
(H)，(7)，(8) に加え，同様の評価が
$a^{(m+1)}, a_h^{(m+1)}, \partial_t^m F, \partial_t^m F_h \ (m = 1, \ldots, q)$ に対して成り立つと仮定する．
$u \in H^1(J, W)$，$u_{h\tau} \in \mathscr{S}_{h\tau}$ をそれぞれ，(A)，(C) の解とする．
$u \in H^{q+2}(J, W)$ かつ (B) の解が $u_h \in H^{q+2}(J, V_h)$ となるならば，h, τ に依存しない正定数 C が存在し，十分小さな h に対し，

$$\sup_{1 \le n \le N} \|u(t_n) - u_{h\tau}^l(t_n)\|_H + \|u - u_{h\tau}^l\|_{L^2(J,V)} \le C(h^k + \tau^{q+1})(C_F + \|u\|_{H^{q+2}(J,W)}) \tag{12}$$

4．滑らかな領域への応用

領域の近似 (cf. Elliott & Ranner (2013)§4)

$\Omega \subset \mathbb{R}^d$: 滑らかな領域，$\Omega_h$: 頂点が $\partial\Omega$ 上にある多角形領域，$\Gamma = \partial\Omega$，
$\Gamma_h = \partial\Omega_h$，$\mathcal{T}_h$: Ω_h の三角形分割，$h = \max_{T \in \mathcal{T}_h} \operatorname{diam} T$
$\{\mathcal{T}_h\}_h$ は shape-regular かつ quasi-uniform と仮定する．
Γ の近傍で定義される Γ への射影 p を用いて，適切な性質を持つ全単射
$G_h \colon \Omega_h \to \Omega$ が構成できる．



領域の近似 (cf. Elliott & Ranner (2013)§4)

Ω_h 上の関数 v_h に対し，Ω 上の関数を $v_h^l = v_h \circ G_h^{-1}$ で定める．
Γ_h 上の関数 v_h に対し，Γ 上の関数を $v_h^l = v \circ p^{-1}$ で定める．

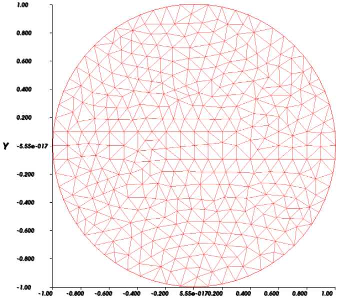
$$
\begin{aligned}
\frac{1}{c}\|v_h^l\|_{L^2(\Omega)} &\le \|v_h\|_{L^2(\Omega_h)} \le c\|v_h^l\|_{L^2(\Omega)} \\
\frac{1}{c}\|\nabla v_h^l\|_{L^2(\Omega)} &\le \|\nabla v_h\|_{L^2(\Omega_h)} \le c\|\nabla v_h^l\|_{L^2(\Omega)} \\
\frac{1}{c}\|v_h^l\|_{L^2(\Gamma)} &\le \|v_h\|_{L^2(\Gamma_h)} \le c\|v_h^l\|_{L^2(\Gamma)} \\
\frac{1}{c}\|\nabla v_h^l\|_{L^2(\Gamma)} &\le \|\nabla v_h\|_{L^2(\Gamma_h)} \le c\|\nabla v_h^l\|_{L^2(\Gamma)}
\end{aligned}
$$

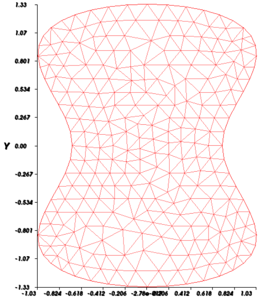
$V = H^1(\Omega), H^1(\Gamma)$，$V_h = H^1(\Omega_h), H^1(\Gamma_h)$ 等は (H-1)，(H-2) を満たす．
熱方程式などの放物型方程式に応用可能．

5．数値計算

数値計算

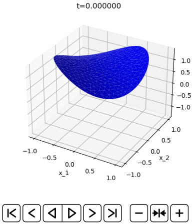
$\Omega \subset \mathbb{R}^2$ を円および非凸領域，$J = (0, 2)$，厳密解 $u(x) = \sin(2\pi t)(1 + x_1 x_2)$ となるように係数関数を定める．空間は P1 有限要素法，時間離散化の次数は $q = 1, 2$ とした．
メッシュ分割に FreeFem++，それ以外の計算に python+numpy+scipy を利用した．

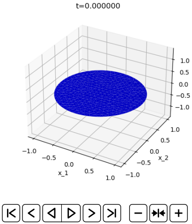


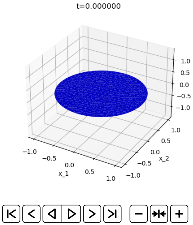


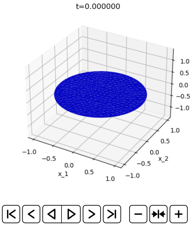
次の境界条件を持つ熱方程式の計算を行った．$(c(t) = e^t)$

$$\partial_t u + c(t)\Delta u + 2u = f(t,x),\ c(t)\partial_\nu u = g(t,x)$$









$q = 1$　　$q = 2$

上：分割数 4，下：分割数 20

数値計算-熱方程式

τ の変化による誤差

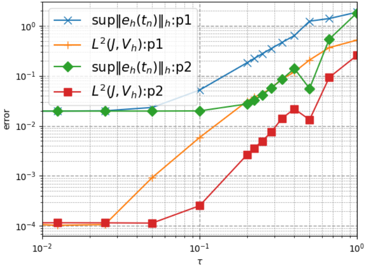


図: 円

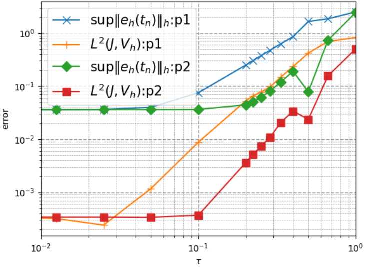


図: 非凸領域

τ がある程度小さくなると，誤差が減らなくなっている．
P1($q=1$) より P2($q=2$) のほうが誤差の収束が速い．
$\sup_{1\le n\le N}\|e_h(t_h)\|_h$ のほうは $O(\tau^q)$ より少し遅い．

数値計算-熱方程式

h の変化による誤差

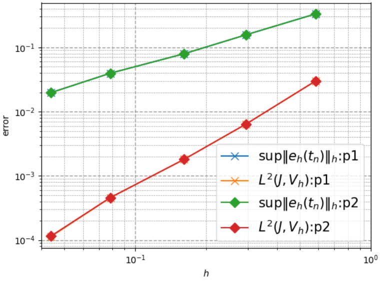


図: 円

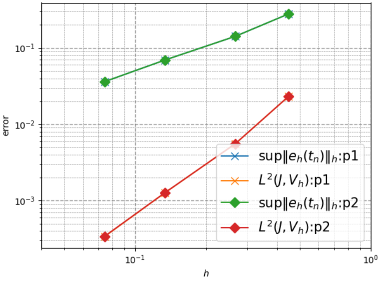


図: 非凸領域

P1 と P2 で誤差はほとんど変わらない.

$\sup_{1\leq n\leq N}\|e_h(t_h)\|_h$ は大体 $O(h)$, $L^2(J,V_h)$ は $O(h^2)$ となっている.

円において，次の境界条件を持つ熱方程式の計算を行った．

$$\partial_t u + c(t)\Delta u = f(t,x),\ \mu\partial_t u + \kappa u + \nabla_\Gamma\cdot(\beta\nabla_\Gamma u) + c(t)\partial_\nu u = g(t,x)$$

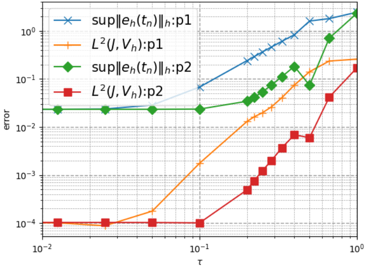


図: τ の変化による誤差

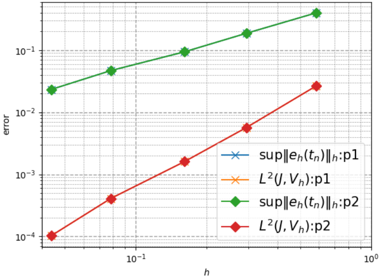


図: h の変化による誤差

熱方程式と同様の結果が得られた．

まとめ

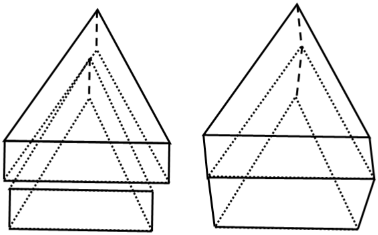
領域近似をベースとする抽象的な放物型方程式に対し，DG time-stepping 法のスキームを提案し，誤差評価を得た．

今後の課題

- 領域が変形する (関数空間が t に依存する) 場合
- 非線形方程式への応用

$\phi_t\colon H(0) \to H(t)$ を用いて時間微分を $\partial^\bullet v = \phi_t(\partial_t(\phi_{-t}v))$ で考えた場合の半離散理論はすでに研究されている．(Elliott, Ranner(2021))
時間近似の際に J_n 上の関数空間をどうとるのかが問題となる．

- J_n 上は $V_h(t_n)$ で計算し，t_{n+1} で関数空間を $V_h(t_{n+1})$ に更新する．
- $V_h(t_n)$ と $V_h(t_{n+1})$ を用いて補間する．
- より広い空間 $\tilde{V}_h$ を考えて計算する．
- ϕ_t で引き戻して $V_h(0)$ で計算する．



DG time-stepping スキーム

$u_{h\tau}^0 = I_h u_0$ と置き，J_n 上でのみ値を持つ $v_{h\tau} \in \mathscr{S}_{h\tau}$ を用いると，(C) は，

$$\int_{J_n} [(\partial_t u_{h\tau}, v_{h\tau})_h + a_h(t; u_{h\tau}, v_{h\tau})] \, dt + (u_{h\tau}^{n,+}, v_{h\tau}^{n,+})_h = \int_{J_n} \langle F_h(t), v_{h\tau} \rangle_h \, dt + (u_{h\tau}^n, v_{h\tau}^{n,+})_{H_h} \qquad (\mathrm{C}_n)$$

と変形でき，$u_{h\tau}^n = u_{h\tau}(t_n) = u_{h\tau}|_{J_{n-1}}(t_n)$ から $u_{h\tau}|_{J_n}$ が計算できる．
$\to n = 0, 1, \ldots, N-1$ と逐次的に計算可能